GUÍA DE APOYO PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO
TALLER DE ECNOMÍA CUANTITAVA IV

Unidad Nº1: Estadística Descriptiva
Tabulación de datos:
- a) cualitativos
- b) cuantitativos

Representación gráfica
Datos Agrupados
Clases e intervalos de clases.
Medidas de tendencia central:
- a) Media aritmética
- b) Mediana
- c) Moda

Medidas de dispersión:
- a) Rango
- b) Desviación media
- c) Varianza
- d) Desviación estándar

Medidas de Posición:
- a) Cuartiles
- b) Percentiles

Criterio de homogeneidad

Unidad Nº2: Probabilidades
Elementos de probabilidades
Concepto de probabilidad en espacio finito equiprobable
Axiomas de probabilidad
Probabilidad condicional
Teorema de Bayes
Eventos independientes
Variables aleatorias
Distribución discreta de probabilidades
Distribución continua de probabilidades
Esperanza
Varianza
Distribuciones discretas:
Bernuolli
Binomial
Hipergeométrica
Distribución Poisson
Distribución continua:
Normal
Normal estándar

Unidad N°3: Intervalos de Confianza
Inferencia estadística
Estimación de parámetros
Estimación por intervalo
Intervalo de confianza para la media de una población normal:
a) conocida su varianza
b) desconocida su varianza
Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Unidad N°4: Pruebas de Hipótesis

Pruebas de hipótesis
Pruebas de unilaterales y bilaterales
Pruebas de hipótesis para:

a) la media si se conoce su varianza
b) la media si se desconoce su varianza
c) la varianza

Unidad N°5: Regresión Lineal

Diagrama de dispersión
Método de mínimos cuadrados
Recta de los mínimos cuadrados
Coeficiente de correlación lineal
Análisis de residuos

1. DISTRIBUCIÓN Y FRECUENCIAS

Tipos de frecuencias

Frecuencia absoluta

La **frecuencia absoluta** es el **número de veces** que aparece un determinado **valor** en un estudio estadístico.

Se representa por f_i.

$$\sum_{i=1}^{i=n} f_i = N$$

Frecuencia relativa

La **frecuencia relativa** es el **cociente** entre la **frecuencia absoluta** de un determinado valor y el **número total de datos**.

Se puede expresar en tantos por ciento y se representa por n_i.

$$n_i = \frac{f_i}{N}$$

La suma de las frecuencias relativas es igual a 1.

Frecuencia acumulada

La **frecuencia acumulada** es la **suma de las frecuencias absolutas** de todos los **valores inferiores o iguales** al **valor** considerado.

Se representa por F_i.

Frec. simple o absoluta

Frec. simple acumulada

Tabla de Distribución de Frecuencias

Frec. Relativa

Frec. Relativa Acumulada

x_i	Recuento	f_i	F_i	n_i	N_i
27	I	1	1	0.032	0.032
28	II	2	3	0.065	0.097
29	~~IIII~~ I	6	9	0.194	0.290
30	~~IIII~~ II	7	16	0.226	0.516
31	~~IIII~~ III	8	24	0.258	0.774
32	III	3	27	0.097	0.871
33	III	3	30	0.097	0.968

34	I	1	31	0.032	1
		31		1	

Este tipo de **tablas de frecuencias** se utiliza con **variables discretas**.

Distribución de Frecuencias Agrupadas

Límites de la clase

Cada **clase** está **delimitada** por el **límite inferior de la clase** y el **límite superior de la clase**.

Amplitud de la clase

La ***amplitud de la clase*** es la ***diferencia*** entre el **límite superior** e **inferior** de la **clase**.

Marca de clase

La **marca de clase** es el **punto medio** de cada **intervalo** y es el **valor** que representa a todo el **intervalo** para el **cálculo** de algunos **parámetros**.

Construcción de una tabla de datos agrupados

3, 15, 24, 28, 33, 35, 38, 42, 43, 38, 36, 34, 29, 25, 17, 7, 34, 36, 39, 44, 31, 26, 20, 11, 13, 22, 27, 47, 39, 37, 34, 32, 35, 28, 38, 41, 48, 15, 32, 13.

Marca de clase o Valor Medio (X_i No Agrup)

Tabla de frecuencias

Clases	c_i	f_i	F_i	n_i	N_i
[0, 5)	2.5	1	1	0.025	0.025
[5, 10)	7.5	1	2	0.025	0.050
[10, 15)	12.5	3	5	0.075	0.125
[15, 20)	17.5	3	8	0.075	0.200
[20, 25)	22.5	3	11	0.075	0.275
[25, 30)	27.5	6	17	0.150	0.425
[30, 35)	32.5	7	24	0.175	0.600
[35, 40)	37.5	10	34	0.250	0.850
[40, 45)	42.5	4	38	0.100	0.950

[45, 50)	47.5	2	40	0.050	1
		40		1	

2. PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

Definición de parámetro estadístico

Un **parámetro estadístico** es un **número** que se obtiene a partir de los **datos** de una **distribución estadística**.

Los **parámetros estadísticos** sirven para sintetizar la información dada por una tabla o por una gráfica.

Tipos de parámetros estadísticos

Hay **tres tipos parámetros estadísticos**:

1. **De Centralización o de Tendencia Central**
2. **De Posición**
3. **De Dispersión**

1. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN O DE TENDENCIA CENTRAL

Nos indican en torno a qué valor (centro) se distribuyen los datos.

La **medidas de centralización** son:

1.1 Media Aritmética o Promedio
1.2 Mediana
1.3 Moda

1.1 MEDIA ARITMÉTICA O PROMEDIO

La **media** es el valor **promedio** de la distribución.

La **media aritmética** es el **valor** obtenido al **sumar** todos los **datos** y **dividir** el resultado entre el **número** total de **datos**.

$\bar{x}$ es el símbolo de la **media aritmética**.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

media no agrupados

Media aritmética para datos agrupados

Si los datos vienen agrupados en una tabla de frecuencias, la expresión de la media es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_n f_n}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{N}$$

media Agrupados

x_i: es el valor medio de la clase.

f_i: es el número de datos (frecuencia) dentro de la clase.

Ejercicio de media aritmética

Clases	VALOR MEDIO x_i	f_i	$x_i * f_i$
[10, 20)	15	1	15
[20, 30)	25	8	200
[30,40)	35	10	350
[40, 50)	45	9	405
[50, 60	55	8	440
[60,70)	65	4	260
[70, 80)	75	2	150
		42	1 820

$$\bar{x} = \frac{1820}{42} = 43.33$$

1.2. MEDIANA

Es el **valor** que ocupa el **lugar central** de todos los **datos** cuando éstos están **ordenados de menor a mayor.**

La **mediana** se representa por **M_e**.

La **mediana** se puede **hallar** sólo para **variables cuantitativas**.

Cálculo de la mediana

1. **Ordenamos** los **datos** de **menor a mayor**.
2. Si la serie tiene un **número impar de medidas** la **mediana** es la **puntuación central** de la-misma.

   2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6**Me= 5**

3. Si la serie tiene un **número par** de puntuaciones la **mediana** es la **media** entre las dos **puntuaciones centrales**.

   7, 8, 9, 10, 11, 12**Me= 9.5**

Cálculo de la mediana para datos agrupados

La **mediana** se encuentra en el **intervalo** donde la **frecuencia acumulada** llega hasta la **mitad de la suma de las frecuencias absolutas**.

Es decir tenemos que buscar el intervalo en el que se encuentre $\frac{N}{2}$

$$Me = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i$$ Mediana Datos Agrupados

L_i: es el límite inferior de la clase donde se encuentra la mediana; es decir el dato $\frac{N}{2}$ que es la semisuma de las frecuencias absolutas.

F_{i-1}: es la **frecuencia acumulada** anterior a la clase mediana.

f_i: es el **número de datos (frecuencia) dentro de la clase.**

a_i: es la amplitud de la clase.

La **mediana** es **independiente** de las **amplitudes** de los **intervalos**.

1.3. MODA

La **moda** es el **valor** que **más se repite** o que tiene **mayor frecuencia absoluta**.

Se representa por **M_o**.

Se puede hallar la **moda** para **variables cualitativas** y **cuantitativas**.

Hallar *la* **moda** *de la distribución:*

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5 $M_o = 4$

Si en un grupo hay **dos o varias puntuaciones** con la **misma frecuencia** y esa frecuencia es la máxima, la **distribución** es **bimodal** o **multimodal**, es decir, tiene **varias modas**.

Cálculo de la moda para datos agrupados

1º Todos los intervalos tienen la misma amplitud.

$$Mo = L_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})} \cdot a_i$$ Moda Datos Agrupados

L_i es el *límite inferior* de la clase modal.

f_i es la frecuencia absoluta de la clase modal.

f_{i-1} es la frecuencia absoluta inmediatamente inferior a la clase modal.

f_{i+1} es la frecuencia absoluta inmediatamente posterior a la clase modal.

a_i es la amplitud de la clase.

También se utiliza otra **fórmula** de la **moda** que da un **valor aproximado** de ésta:

$$Mo = L_i + \frac{f_{i+1}}{f_{i-1} + f_{i+1}} \cdot a_i$$ Moda Simplificada Datos Agrupados

2º Los intervalos tienen amplitudes distintas.

En primer lugar tenemos que hallar las alturas.

$$h_i = \frac{f_i}{a_i}$$

La clase modal es la que tiene mayor altura.

$$Mo = L_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{(h_i - h_{i-1}) + (h_i - h_{i+1})} \cdot a_i$$

Moda Datos Agrupados

$h_i = \frac{f_i}{a_i}$

La **fórmula** de la **moda aproximada** cuando existen distintas amplitudes es:

$$Mo = L_i + \frac{h_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} \cdot a$$

Moda Simplificada Datos Agrupados

2. MEDIDAS DE POSICIÓN

Las **medidas de posición** dividen un conjunto de datos en grupos con el mismo número de individuos.

Para calcular las **medidas de posición** es necesario que los **datos** estén ordenados de **menor a mayor**.

La **medidas de posición** son:

- **2.1** **Cuartiles:** **dividen** la serie de datos en **4 partes iguales**.
- **2.2** **Deciles:** **dividen** la serie de datos en **10 partes iguales**.
- **2.3** **Percentiles:** **dividen** la serie en **100 partes iguales**.

2.1 CUARTILES

Los **cuartiles** son los **tres valores** de la variable que **dividen** a un **conjunto de datos ordenados** en **cuatro partes iguales**.

Q_1, Q_2 y Q_3 determinan los valores correspondientes al **25%**, al **50%** y al **75%** de los **datos**.

Q_2 coincide con la **mediana**.

Cálculo de los cuartiles

1. **Ordenamos** los **datos** de **menor a mayor**.
2. Buscamos el lugar que ocupa cada **cuartil** mediante la expresión:

$$\frac{k \cdot N}{4}, \; k = 1, 2, 3$$

Cuartiles

Número impar de datos

2, 5, 3, 6, 7, 4, 9

2, 3, 4, 5, 6, 7, 9

$$\begin{array}{ccccccc} 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 9 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & Q_1 & & Q_2 & & Q_3 & \end{array}$$

$Q_1=7/4=1.75$; $Q2=14/4=3.5$; $Q3 = 21/4=5.25$

Número par de datos

2, 5, 3, 4, 6, 7, 1, 9

$$\begin{array}{cccc} 1, & \underline{2,\ 3,} & \underline{4,\ 5,} & \underline{6,\ 7,}\ 9 \\ & 2.5 & 4.5 & 6.5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array}$$

$Q_1=8/4=2$; $Q2=16/4=4$; $Q3 = 24/4=6$

<u>Cálculo de los cuartiles para datos agrupados</u>

En primer lugar buscamos la **clase** donde se encuentra $\frac{k \cdot N}{4},\ k = 1, 2, 3$, en la **tabla de las frecuencias acumuladas.**

$$Q_k = L_i + \frac{\frac{k \cdot N}{4} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i \qquad k = 1, 2, 3$$

Cuartiles Datos Agrupados

L_i es el límite inferior de la clase donde está el cuartil.

N es la suma de las frecuencias absolutas.

F_{i-1} la **frecuencia acumulada** anterior a la clase del cuartil.

f_i: es el **número de datos (frecuencia) dentro de la clase.**

a_i es la amplitud de la clase.

<u>Ejercicio de Cuartiles</u>

Clases	f_i	F_i
[50, 60)	8	8
[60, 70)	10	18

[70, 80)	16	34
[80, 90)	14	48
[90, 100)	10	58
[100, 110)	5	63
[110, 120)	2	65
	65	

Cálculo del primer cuartil

$$\frac{65 \cdot 1}{4} = 16.25$$

$$Q_1 = 60 + \frac{16.25 - 8}{10} \cdot 10 = 68.25$$

Cálculo del segundo cuartil

$$\frac{65 \cdot 2}{4} = 32.5$$

$$Q_2 = 70 + \frac{32.5 - 18}{16} \cdot 10 = 79.0625$$

Cálculo del tercer cuartil

$$\frac{65 \cdot 3}{4} = 48.75$$

$$Q_3 = 90 + \frac{48.75 - 48}{10} \cdot 10 = 90.75$$

2.2 DECILES

Los **deciles** son los **nueve valores** que **dividen** la serie de **datos** en **diez partes iguales**.

Los **deciles** dan los valores correspondientes al 10%, al 20%... y al 90% de los datos.

D_5 coincide con la **mediana**.

Cálculo de los deciles

En primer lugar buscamos la clase donde se encuentra $\frac{k \cdot N}{10}$, $k = 1, 2, ..9$, en la tabla de las frecuencias acumuladas.

$$D_k = L_i + \frac{\frac{k \cdot N}{10} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i \qquad k = 1, 2, ..9$$

Deciles Agrupados

L_i es el límite inferior de la clase donde se encuentra el decil.

N es la suma de las frecuencias absolutas.

F_{i-1} es la **frecuencia acumulada** anterior a la clase el decil.

a_i es la amplitud de la clase. f_i= frecuencia absoluta de clase donde está el decil

Ejercicio de Deciles

Clases	f_i	F_i
[50, 60)	8	8
[60, 70)	10	18
[70, 80)	16	34
[80, 90)	14	48
[90, 100)	10	58
[100, 110)	5	63
[110, 120)	2	65
	65	

Cálculo del primer decil

$$\frac{65 \cdot 1}{10} = 6.5$$

$$D_1 = 50 + \frac{6.5 - 0}{8} \cdot 10 = 58.12$$

Cálculo del quinto decil

$$\frac{65 \cdot 5}{10} = 32.5$$

$$D_5 = 70 + \frac{32.5 - 18}{16} \cdot 10 = 79.06$$

Cálculo del noveno decil

$$\frac{65 \cdot 9}{10} = 58.5$$

$$D_9 = 100 + \frac{58.5 - 58}{5} \cdot 10 = 101$$

2.3 PERCENTILES

Los **percentiles** son los **99 valores** que **dividen** la serie de **datos** en **100 partes iguales.**

Los **percentiles** dan los valores correspondientes al 1%, al 2%... y al 99% de los datos.

P_{50} coincide con la **mediana**.

Cálculo de los percentiles

En primer lugar buscamos la clase donde se encuentra $\frac{k \cdot N}{100}$, $k = 1, 2, ..99$, en la tabla de las frecuencias acumuladas.

$$P_k = L_i + \frac{\frac{k \cdot N}{100} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i \qquad k = 1, 2, ..99$$

Percentiles Agrupados

L_i es el límite inferior de la clase donde del percentil.

N es la suma de las frecuencias absolutas.

F_{i-1} frecuencia acumulada anterior a la clase del percentil.

a_i es la amplitud de la clase. f_i = frec. simple Nº clase donde está el percentil

Ejercicio de Percentiles

Clases	f_i	F_i
[50, 60)	8	8
[60, 70)	10	18

[70, 80)	16	34
[80, 90)	14	48
[90, 100)	10	58
[100, 110)	5	63
[110, 120)	2	65
	65	

Percentil 35

$$\frac{65 \cdot 35}{100} = 22.75$$

$$P_{35} = 70 + \frac{22.75 - 18}{16} \cdot 10 = 72.97$$

Percentil 60

$$\frac{65 \cdot 60}{100} = 39$$

$$P_{60} = 80 + \frac{39 - 34}{14} \cdot 10 = 83.57$$

3. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión nos informan sobre cuanto se alejan del centro los valores de la distribución.

Las medidas de dispersión son:

3.1 Rango o Recorrido
3.2 Desviación Media
3.3 Varianza
3.4 Desviación Estándar o Desviación Típica
3.5 Coeficiente de Variación
3.6 Puntuaciones Típicas

3.1 RANGO O RECORRIDO

El **rango** es la **diferencia** entre el **mayor** y el **menor** de los **datos** de una distribución estadística.

R = DM − dm

R es el Rango

DM es el Dato Mayor.

Dm es el dato menor.

3.2 DESVIACIÓN MEDIA

La **desviación media** es la **media aritmética** de los **valores absolutos de las desviaciones** respecto a la **media**.

La **desviación media** se representa por $D_{\bar{x}}$

$$D_{\bar{x}} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{N}$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{N}$$

Desviación Media

Ejemplo

9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18

$$\bar{x} = \frac{9+3+8+8+9+8+9+18}{8} = 9$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{|9-9| + |3-9| + |8-9| + |8-9| + |9-9| + |8-9| + |9-9| + |18-9|}{8} = 2.25$$

Desviación media para datos agrupados

Si los datos vienen agrupados en una **tabla de frecuencias**, la expresión de la **desviación media** es:

$$D_{\bar{x}} = \frac{|x_1 - \bar{x}| f_1 + |x_2 - \bar{x}| f_2 + \ldots + |x_n - \bar{x}| f_n}{N}$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| f_i}{N}$$

Desviación Media
Datos Agrupados

x_i: **es el valor medio de la clase.**

Ejemplo

Clases	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$\lvert x - x \rvert$	$\lvert x - x \rvert * f_i$
[10, 15)	12.5	3	37.5	9.286	27.858
[15, 20)	17.5	5	87.5	4.286	21.43
[20, 25)	22.5	7	157.5	0.714	4.998
[25, 30)	27.5	4	110	5.714	22.856
[30, 35)	32.5	2	65	10.714	21.428
		21	**457.5**		**98.57**

$$\bar{x} = \frac{457.5}{21} = 21.786$$

$$D_{\bar{x}} = \frac{98.57}{21} = 4.69$$

3.3 VARIANZA

La **varianza** es la **media aritmética** del **cuadrado de las desviaciones** respecto a la **media**. Se representa por σ^2.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{N} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Varianza

$\hookrightarrow N-1$

Varianza para datos agrupados

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}$$

Varianza Dator Agrupada

$\hookrightarrow N-1$

x_i: es el **valor medio de la clase.**

Ejercicios de Varianza

9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18

$$\bar{x} = \frac{9+3+8+8+9+8+9+18}{8} = 9$$

$$\sigma^2 = \frac{(9-9)^2 + (3-9)^2 + (8-9)^2 + (8-9)^2 + (9-9)^2 + (8-9)^2 + (9-9)^2 + (18-9)^2}{8} = 15$$

Datos Agrupados

Clases	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[10, 20)	15	1	15	225
[20, 30)	25	8	200	5000
[30,40)	35	10	350	12 250
[40, 50)	45	9	405	18 225
[50, 60	55	8	440	24 200
[60,70)	65	4	260	16 900
[70, 80)	75	2	150	11 250
		42	**1 820**	**88 050**

$$\bar{x} = \frac{1820}{42} = 43.33$$

$$\sigma^2 = \frac{88050}{42} - 43.33^2 = 218.94$$

3.4 DESVIACIÓN TÍPICA O DESVIACIÓN ESTÁNDAR

La **desviación típica** es la **raíz cuadrada** de la **varianza**.

Es decir, la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de las puntuaciones de desviación.

La **desviación típica** se representa por **σ**.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{N}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Des. Estándar

Desviación típica para datos agrupados

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{N}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}}$$

Desv. Estándar Datos Agrupados

x_i: **es el valor medio de la clase.**

Ejercicios de Desviación Típica

9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18

$$\bar{x} = \frac{9+3+8+8+9+8+9+18}{8} = 9$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(9-9)^2+(3-9)^2+(8-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(8-9)^2+(9-9)^2+(18-9)^2}{8}} = 3.87$$

Datos Agrupados

Clases	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[10, 20)	15	1	15	225
[20, 30)	25	8	200	5000
[30,40)	35	10	350	12 250
[40, 50)	45	9	405	18 225
[50, 60)	55	8	440	24 200
[60,70)	65	4	260	16 900
[70, 80)	75	2	150	11 250
		42	**1 820**	**88 050**

$$\bar{x} = \frac{1820}{42} = 43.33$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{88050}{42} - 43.33^2} = 14.797$$

3.5 COEFICIENTE DE VARIACIÓN

El **coeficiente de variación** es la relación entre la **desviación típica** de una muestra y su **media**.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$ Coef de Variación

El **coeficiente de variación** se suele expresar en **porcentajes**:

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100$$ Coef. de Variación en %

El **coeficiente de variación** permite comparar las **dispersiones** de dos distribuciones distintas, siempre que sus **medias** sean **positivas**.

Se calcula para cada una de las distribuciones y los valores que se obtienen se comparan entre sí.

La mayor dispersión corresponderá al valor del **coeficiente de variación mayor.**

Ejercicio

Una distribución tiene x = 140 y σ = 28.28 y otra x = 150 y σ = 24. ¿Cuál de las dos presenta mayor dispersión?

$$C.V._1 = \frac{28.28}{140} \cdot 100 = 20.2\%$$

$$C.V._2 = \frac{24}{150} \cdot 100 = 16\%$$

La primera distribución presenta mayor dispersión.

3.6 PUNTUACIONES TÍPICAS

Puntuaciones diferenciales

Las **puntuaciones diferenciales** resultan de **restarles** a las **puntuaciones directas la media aritmética.**

$$x_i = X_i - \overline{X}$$ Puntuación Diferencial

Puntuaciones típicas

Las **puntuaciones típicas** son el resultado de **dividir** las **puntuaciones diferenciales** entre la **desviación típica**. Este proceso se llama **tipificación.**

Las **puntuaciones típicas** se representan por **z.**

$$z = \frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}$$ Puntuación Típica

Ejemplo

En una clase hay 15 alumnos y 20 alumnas. El peso medio de los alumnos es 58.2 kg y el de las alumnas y 52.4 kg. Las desviaciones típicas de los dos grupos son, respectivamente, 3.1 kg y 5.1 kg. El peso de José es de 70 kg y el de Ana es 65 kg. ¿Cuál de ellos puede, dentro del grupo de alumnos de su sexo, considerarse más grueso?

$$z_1 = \frac{70 - 58.2}{3.1} = 3.81 \qquad z_2 = \frac{65 - 52.4}{5.1} = 2.47$$

José es más grueso respecto de su grupo que Ana respecto al suyo.

Variables Aleatorias(v.a)

Concepto: una variable aleatoria es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.

Se usarán letras mayúsculas para denotar a una v.a y letras minúsculas para denotar los valores que ella adquiere.

Ejemplos:

1) Se sacan dos pelotas en sucesión, sin reemplazo, de una urna que contiene 4 pelotas rojas y 3 negras. Los resultados posibles y los valores x de la v.a X, donde X es el número de pelotas rojas son:

Espacio muestral	x
RR	2
RN	1
NR	1
NN	0

2) El encargado de un almacén le devuelve tres cascos de seguridad, seleccionados aleatoriamente, a tres obreros del taller, quienes ya se lo habían probado previamente. Suponiendo que el orden de los obreros Pérez, González y Muñoz es el correcto para recibir su casco original, señale los posibles órdenes en que los tres obreros reciben un casco y encuentre los valors m de la v.a M que representa el número de asociaciones correctas.

Espacio muestral	m
PGM	3
PMG	1
MPG	0
MGP	1
GPM	1
GMP	0

En los ejemplos anteriores, el espacio muestral tiene un número finito de elementos.

Conceptos:

1) Si en espacio muestral contiene un número finito de posibilidades o una secuencia interminable con tantos elementos como números naturales existen, entonces se llama ***espacio muestral discreto***.

Los dos ejemplos anteriores corresponden a espacio muestral discreto.

2) Si en espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades igual al número de puntos de un segmento de línea, entonces se llama ***espacio muestral continuo***.

Por ejemplo: tiempo necesario para ejecutar una reacción química.

Una v.a se llama ***v.a discreta*** si se puede contar su conjunto de resultados posibles.Una v.a se llama ***v.a continua*** si se puede tomar en una escala continua.

FUNDAMENTOS DE PROBABILIDAD

4.29. Se seleccionarán 5 secretarias de un grupo de 20 para formar un "pool" secretarial. Utilice la regla de las combinaciones para encontrar el número total de "pools" distintos que se pueden formar.

4.30. Un experimento consiste en asignar 10 trabajadores para 10 tareas distintas (un trabajador por tarea y viceversa). ¿De cuántas maneras distintas pueden asignarse los 10 trabajadores a las 10 tareas?

4.31. Refiérase al ejercicio 4.30 y suponga que solamente hay 4 tareas por realizarse. ¿De cuántas maneras se pueden asignar 4 trabajadores de 10 para hacer 4 tareas distintas?

4.32. Se llevó a cabo un estudio para determinar las actitudes de las enfermeras de un hospital frente a diversas disposiciones administrativas. Si se seleccionó una muestra de 10 enfermeras de un total de 90, ¿cuántas muestras posibles había? (Note que el orden no importa.)

4.33. A los compradores de determinados aparatos de TV se les ofrecen tres estilos distintos del mueble para que escojan. ¿Cuántos resultados posibles hay si se considera 1 comprador? ¿Si se consideran 2 compradores? ¿Diez?

4.34. Si se seleccionan cinco cartas con reposición de un conjunto de 52 cartas; esto es, se selecciona al azar la primera y se regresa al conjunto de cartas, se selecciona al azar una segunda carta y se regresa etc. ¿cuántas selecciones posibles hay?

4.35. Refiérase al ejercicio 4.34 y suponga que las 5 cartas se seleccionan sin reponerse en cada selección, o lo que es equivalente, se seleccionan simultáneamente. ¿Cuántas selecciones posibles hay?

4.8 Probabilidad subjetiva

La probabilidad de un evento se puede ver como una medida de la certeza que se tenga sobre su ocurrencia. De ese modo queda asignado un número a cada punto muestral que cumple con

$$0 \leq P(E_i) \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{S} P(E_i) = 1$$

Supuestamente, el número asignado a cada punto muestral E_i, $i = 1, 2, \ldots,$ etc., es una medida de lo que el experimentador cree sobre la ocurrencia de ese punto muestral al observar el experimento una vez.

En muchos experimentos se puede considerar la probabilidad de un evento, la medida de la certidumbre de su ocurrencia, como la fracción de veces que ocurriría si se repitiese el experimento un número grande de ocasiones. Esta interpretación es referida como la interpretación frecuencial de la probabilidad, desde el punto de vista de la frecuencia relativa.

En otros experimentos, sin embargo, la interpretación no es tan simple. En particular, si se piensa en experimentos que no pueden ser repetidos. ¿Cómo se puede interpretar la probabilidad de un evento asociado a un experimento que no puede repetirse ya sea debido al costo o a su naturaleza? Por ejemplo, el evento "las ganancias aumentarán el año próximo después de que se fusionen las compañías A y B," está asociado a un experimento que no podría repetirse. El que aumenten o disminuyan las tasas de interés en un momento determinado es también un evento asociado a un experimento que sólo puede llevarse a cabo una sola vez.

Para contestar la pregunta anterior, véase la frase inicial de esta sección. **La probabilidad de un evento se puede ver como una medida de la certeza que se tenga sobre su ocurrencia.** Si sólo se consideran experimentos suceptibles de repetirse, se puede optar por interpretar esa medida de certeza en téminos de frecuencias relativas. En ese caso las probabilidades de los puntos muestrales pueden verse (sólo como una verificación) como frecuencias observadas. Aquellos experimentos que no pueden repetirse requieren entonces de una evaluación **subjetiva** de las probabilidades de los puntos muestrales o, lo que es equivalente, de los eventos en general. Estas probabilidades (evaluadas subjetivamente) las debe especificar una persona familiarizada con el experimento y que tenga experiencia suficiente como para hacer una determinación razonable.

Por ejemplo, un economista empleado en el gobierno está familiarizado con políticas gubernamentales y con las tendencias en el mercado monetario. Debería entonces estar en posición de asignar una probabilidad razonable al evento de que aumenten las tasas de interés en un momento determinado. (El hecho de que con frecuencia los economistas no están en posición de hacerlo queda manifesto con las declaraciones públicas hechas por algunos de ellos en los que existen puntos de vista contradictorios en relación a la probabilidad de ocurrencia de determinados eventos.) Las probabilidades que se asignen a eventos y que son evaluadas subjetivamente y basadas en "experiencia" se denominan **probabilidades subjetivas** o, algunas veces, probabilidades personales.

El cómo alguna persona determina las probabilidades de los puntos muestrales o la probabilidad de algún evento es en realidad irrelevante si las cantidades así determinadas proporcionan una medida precisa y razonable de la verosimilitud de ocurrencia de esos eventos. Finalmente, ya que la precisión en el cálculo de la probabilidad de un evento depende de la precisión en la determinación de las probabilidades de los puntos muestrales (que lo componen) hay que conservar en mente que las suposiciones incorrectas llevarán siempre a conclusiones también incorrectas.

4.9 Variables aleatorias

En la sección 4.2 se definió un experimento como el proceso por medio del cual una observación (o medición) es registrada. Aun cuando las observaciones resultantes no son siempre numéricas en aquellos experimentos en los que no se producen observaciones cuantitativas, éstas pueden cuantificarse asignándoles números que indiquen o representen una categorización. Así, finalmente el interés queda centrado alrededor de experimentos que producen resultados numéricos.

Suponga que la variable medida en un experimento se denota por el símbolo y. La variable y es llamada **variable aleatoria** si el hecho de que tome un determinado valor es en sí un evento aleatorio.

Definición

Una variable y es una **variable aleatoria** si los valores que toma corresponden a los distintos resultados posibles de un experimento, y por ello el hecho de que tome un valor particular es un evento aleatorio.

Solución.

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{(5)(4)}{2} = 10$$

El siguiente ejemplo ilustra el uso de las reglas de conteo en la solución de un problema de probabilidad.

Ejemplo 4.21 Hay cinco productores que producen un tipo especial de tubo pantalla de televisión y la calidad de éste varía según el productor. Sin saber qué productores son los que producen el tubo de mejor calidad, se sabe que las calidades son distintas. Si se seleccionan a tres de los cinco productores al azar ¿cuál es la probabilidad de que en la selección se tengan exactamente a dos de los tres mejores?

Solución Sin necesidad de hacer una enumeración de los puntos muestrales, por la naturaleza del experimento puede afirmarse que cada punto muestral, esto es cada combinación de 3, tendrá la misma probabilidad. Si S tiene N puntos, entonces cada punto debe recibir la misma probabilidad,

$$P(E_i) = \frac{1}{N}$$

Sea n_A el número de puntos muestrales en los cuales exactamente 2 de los 3 mejores fueron escogidos. Se sigue que la probabilidad de incluir a dos de los tres mejores en la selección de 3 es

$$P = \frac{n_A}{N}$$

El problema restante es entonces utilizar las reglas de conteo para encontrar n_A y N.

Dado que el orden (de los productores) dentro de una selección no importa (de hecho ni se registra), cada selección de 3 es en efecto una combinación, y se tiene

$$N = C_3^5 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

La determinación de n_A es más difícil pero puede hacerse usando la regla mn. Denótese por a al número de maneras en las que se seleccionan exactamente 2 de entre los tres mejores, esto es

$$a = C_2^3 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

Por otro lado denote por b el número de maneras en las que se puede seleccionar un productor (el restante) de entre los 2 peores, esto es

$$b = C_1^2 = \frac{2!}{1!\,1!} = 2$$

Entonces, el total de maneras en las que se eligen exactamente dos de entre los tres mejores será

$$n_A = ab = 6$$

De ahí que la probabilidad buscada P es

$$P = \frac{n_A}{N} = \frac{6}{10}$$

Con frecuencia los estudiantes titubean en relación a qué regla de conteo utilizar en un caso particular. Las siguientes son algunas sugerencias que pueden ser de utilidad.

Sugerencias para diagnóstico de aplicación de regla de conteo

1. Una de las tres reglas de conteo de esta sección puede ser aplicable a un problema de probabilidad si los puntos muestrales son identificables por un número fijo de características.
2. La regla mn puede ser aplicable si las características referidas en 1 se toman una sola de cada uno de varios conjuntos. Si fuesen tomadas de un solo conjunto entonces las reglas que pueden ser aplicables son las de permutación y combinación.
3. La regla de las combinaciones puede ser aplicable si las características se toman de un solo conjunto y el reordenamiento de las características no produce otro punto muestral.
4. La regla de las permutaciones puede ser aplicable si las características se toman de un solo conjunto y cada reordenamiento de ellas corresponde a un nuevo punto muestral.

Ejercicios

Verifique cada uno de los siguientes ejercicios a la luz de las sugerencias para diagnosticar.

4.22. Un viajero puede ir a San Francisco en tres aerolíneas distintas y cada una tiene cuatro vuelos diarios y directos. Si la selección de una aerolínea y un vuelo particular representa a un punto muestral ¿cuántas características lo definen? ¿De cuántos conjuntos se extraen estas características? Utilice la regla mn para dar el número de combinaciones aerolínea-vuelo de que dispone el viajero. Construya un diagrama similar al de la figura 4.8 para identificar las combinaciones aerolínea-vuelo.

4.23. Utilice la regla mn para encontrar el número de puntos muestrales asociados al ejercicio 4.9.

4.24. Un candado de combinación se abre sólo cuando la combinación correcta de los tres dígitos es seleccionada. Cada dígito puede ser cualquier número entre 0 y 9. Si una combinación particular de dígitos representa a un punto muestral ¿cuántas características se están utilizando para definirlo? Utilice la regla mn para encontrar las posibles combinaciones del candado.

4.25. Un grupo de diez pacientes ingresa a una clínica en donde serán atendidos cada uno, por uno de tres médicos. Si los resultados de este experimento pueden identificarse con el conjunto de consultas tales como el Dr. A ve al paciente 1 ó el Dr. B ve al paciente 3, etc. utilice la regla mn para encontrar el número de puntos muestrales de tal experimento.

4.26. El presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de una determinada asociación, se elegirán de entre 10 candidatos. Utilice la regla de las permutaciones para encontrar el número de maneras distintas en que esos puestos pueden ocuparse.

4.27. Un equipo de tenis tiene 10 jugadores de los cuales se asignarán para jugar los 6 torneos de "singles." Los torneos de singles se listan como el singles 1, singles 2, etc. Utilice la regla de las permutaciones para encontrar el número total de asignaciones jugador-posición.

4.28. Utilice la regla de las combinaciones para encontrar el número de maneras en las que se pueden seleccionar dos tipos de acciones de bolsa de cuatro que se ofrecen en el mercado.

Otro resultado matemático de gran utilidad es uno asociado con ordenaciones o **permutaciones**. Supóngase por ejemplo que se tienen tres libros b_1, b_2 y b_3. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un librero si se escogen dos libros cada vez? En otras palabras, ¿cuántos arreglos (ordenados) de dos libros pueden hacerse?

En la primera columna se hace una enumeración de todas las combinaciones de dos, y en la segunda columna se anotan los reordenamientos:

1º pos 2º pos
b_1 — b_2, b_3
b_2 — b_1, b_3
b_3 — b_1, b_2

COMBINACIONES DE DOS	REORDENACIONES DE LAS COMBINACIONES
b_1,b_2	b_2,b_1
b_1,b_3	b_3,b_1
b_2,b_3	b_3,b_2

El número de permutaciones es 6, un resultado fácilmente deducido de la reglas mn. El primer libro puede escogerse de 3 maneras y el segundo sólo de 2 maneras. El resultado es $mn = 6$.

¿De cuántas maneras se pueden ordenar tres libros en un librero escogiendo 3 cada vez?

Enumerando, se tiene

$$b_1b_2b_3 \quad b_2b_1b_3 \quad b_3b_1b_2$$
$$b_1b_3b_2 \quad b_2b_3b_1 \quad b_3b_2b_1$$

1º pos 2º pos
b_1 — $b_2 - b_3$, $b_3 - b_2$
b_2 — $b_1 - b_3$, $b_3 - b_1$
b_3 — $b_1 - b_2$, $b_2 - b_1$

un total de 6. Otra vez, esto se obtiene fácilmente por la extensión de la regla mn. El primer libro se escoge de $m = 3$ maneras. Después de escoger el primero el segundo se puede escoger de $n = 2$ maneras y finalmente después de escoger el primero y el segundo, el tercero de $t = 1$ maneras. De ahí que el total de maneras sea

$$N = mnt = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Definición
Un arreglo ordenado de t objetos distintos es llamado una **permutación.** El número total de maneras para ordenar n objetos distintos tomados r cada vez se designa por el símbolo P_r^n.

Como ya se ha visto, el número de permutaciones de n objetos tomados r cada vez es equivalente a encontrar el número de maneras en las que se pueden llenar r espacios con n objetos distintos. La regla de conteo para encontrar P_r^n se da en el siguiente cuadro.

Una regla de conteo para permutaciones

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Recuérdese que $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$, y que se conviene en que $0! = 1$. Así, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Ejemplo 4.18 Se extraen 3 boletas de lotería de un total de 50. Supóngase que el orden (de extracción) es de importancia. ¿Cuántos puntos muestrales hay asociados a este experimento?

Solución Como $n = 50$ y $r = 3$, el número total de puntos muestrales es

$$P_3^{50} = \frac{50!}{47!} = 50(49)(48) = 117{,}600$$

Ejemplo 4.19 Una sección de una maquinaria determinada consta de cinco piezas y puede ser ensamblada poniendo las piezas en cualquier orden. Supóngase que se decide estudiar el tiempo de ensamblaje para esta sección de maquinaria midiendo el tiempo que requiere para cada uno de los ensamblajes resultantes de tomar las piezas en distinto orden. ¿Cuántas de estas mediciones habrá que hacer?

Solución Como $n = 5$ y $r = 5$, el número total de mediciones es

$$P_5^5 = \frac{5!}{0!} = 5(4)(3)(2)(1) = 120$$

En la discusión de las permutaciones de los libros se hizo una enumeración sistemática (en el caso $n = 3$, $r = 2$). Primero se anotaron las combinaciones de n libros tomando r cada vez y después anotando reordenaciones de las combinaciones obtenidas.

En muchas situaciones el orden no es importante porque el interés es exclusivamente en las **combinaciones.** Por ejemplo, supóngase que el experimento consiste en la selección de 5 personas para formar un comité, de un total de 20. Aquí, los eventos simples corresponden a las distintas combinaciones de personas que se seleccionen del grupo de 20 candidatos. ¿Cuántos eventos simples (combinaciones distintas) hay asociadas a este experimento? Como el orden no importa, no se pueden utilizar las permutaciones. Sólo son de interés las combinaciones de $n = 20$ cosas tomando $r = 5$ cada vez.

Definición
El número de **combinaciones** de n objetos tomados r cada vez se denota por el símbolo C_r^n. (Muchos autores utilizan el símbolo $\binom{n}{r}$.)

El número de combinaciones de n objetos tomando r cada vez se puede obtener de la fórmula del cuadro que sigue

Una regla de conteo para combinaciones

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo 4.20 Un bulbo de un radio puede ser comprado de cualquiera de cinco proveedores. ¿De cuántas maneras se pueden escoger tres de los cinco proveedores?

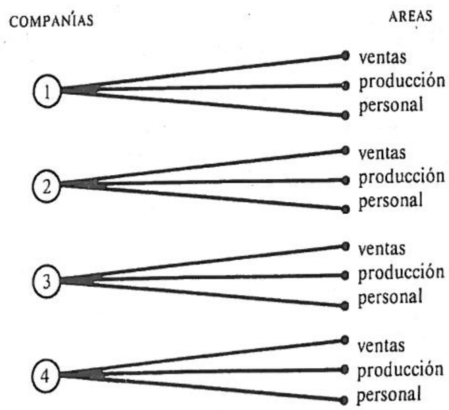


Figura 4.8 *Combinaciones compañías-áreas*

4(3) = 12 posibilidades de tipo de vacante; que corresponden a las distintas combinaciones compañía-área.

El ejemplo anterior ilustra el uso de la regla *mn*.

La regla mn

Con m elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ y n elementos $b_1, b_2, \ldots, b_n$, es posible formar mn pares que contengan un elemento de cada grupo.

Ejemplo 4.15 Se lanzan dos dados. ¿Cuántos puntos muestrales quedan asociados al experimento?

Solución El primer dado puede caer de seis maneras, esto es $m = 6$. De manera similar, el segundo dado puede caer de $n = 6$ maneras. El número total N de puntos muestrales es, entonces

$$N = mn = 6(6) = 36$$

Como ya se mencionó, la regla mn da el número de parejas que se pueden formar seleccionando de cada grupo los objetos. La regla puede extenderse para ver el número de tripletas (o ternas) seleccionando los objetos de cada uno de tres grupos; similarmente cuaternias (cuadrupletas) seleccionando de 4 grupos y así sucesivamente. Para las tripletas se ilustra con la figura 4.9. Si se tienen m elementos en el primer grupo, n en el segundo y t en el tercero, el número total de tripletas que se pueden formar tomando un objeto de cada grupo es mnt, que es el número de ramas mostradas en la figura 4.9.

Ejemplo 4.16 ¿Cuántos puntos muestrales hay en el espacio muestral asociado al experimento de lanzar tres monedas?

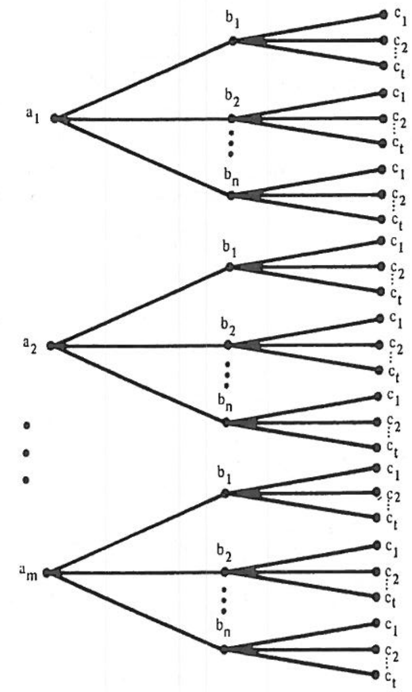
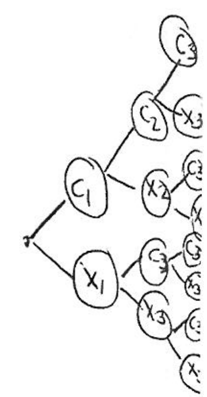


Figura 4.9 *Formación de mnt tripletas*



Solución Cada moneda puede caer de 2 maneras. De ahí que

$$N = 2(2)(2) = 8$$

Ejemplo 4.17 Un chofer de un camión puede tomar cualquiera de tres carreteras para ir de la ciudad A a la B; y para ir de la ciudad B a la C puede tomar cualquiera de 4 carreteras. Finalmente para ir de C a la ciudad D tiene 3 carreteras posibles. Si para ir de A a D debe de ir de A a B, de B a C y de C a D; ¿cuántas rutas posibles tiene para ir de A a D?

Solución Sean

m = número de rutas de A a B = 3
n = número de rutas de B a C = 4
t = número de rutas de C a D = 3

El total de maneras para construir una ruta de A a D escogiendo una de A a B, otra de B a C y la última de C a D es

$$mnt = (3)(4)(3) = 36$$

Suponga que de una investigación independiente, encontramos que el 2% de todos los clientes (crédito-habientes) finalmente no pagan sus cuentas y que de aquellas que finalmente sí las pagan, el 45% se han demorado en por lo menos dos ocasiones.

Encuentre la probabilidad de que un cliente que ya se demoró por lo menos en 2 ocasiones finalmente no pague su cuenta y con la información obtenida analice la política que ha sugerido el gerente de ventas.

Solución Denotemos por L y D a los eventos:

L: el evento de que un cliente (crédito-habiente) se demore una semana o más en sus pagos, en por lo menos 2 ocasiones distintas.

D: el evento de que un cliente finalmente no pague su cuenta y sea $\bar{D}$ el evento complementario del evento D. Se requiere la probabilidad condicional

$$P(D|L) = \frac{P(DL)}{P(L)} = \frac{P(L|D)P(D)}{P(L|D)P(D) + P(L|\bar{D})P(\bar{D})}$$

De la información dada en la descripción del problema, encontramos que

$$P(D|L) = \frac{(.90)(.02)}{(.90)(.02) + (.45)(.98)} = \frac{.0180}{.0180 + .4410} = .0392$$

Se sigue de lo anterior, que si el plan del gerente de crédito es aceptado, la probabilidad será de más o menos .04; esto es se tendrá que aproximadamente 1 de cada 25 clientes de los que les será retirado el crédito iban a ser de los que finalmente no pagan. A menos de que se considere apropiado el pagar el precio de perder 24 clientes "buenos" para eliminar a 1 cliente "malo," el plan propuesto por el gerente de crédito es un plan bastante malo.

Ejercicios

99%

4.18. Refiérase al ejercicio 4.11 y encuentre la probabilidad de que un lote sea de calidad "buena" dado que fue aceptado por el inspector.

4.19. Similar a lo que se detalla en el ejercicio 4.11, los planes de inspección por muestreo también son utilizados por los productores para llevar un control de la calidad de los productos que elaboran. De este modo, el productor espera poder detectar los artículos de mala calidad para quitarlos de los lotes que envía a los compradores. Suponga que en una determinada planta de manufactura, hacia el final de la línea de producción el inspector de calidad escoge algunos artículos que le paracen de calidad sospechosa para someterlos a una inspección minuciosa. Si 10% de todos los artículos producidos son defectuosos, 60% de los defectuosos se someten a una inspección minuciosa y sólo 20% de los no defectuosos se someten a una inspección minuciosa, calcule la probabilidad de que un artículo sea defectuoso dado que fue inspeccionado minuciosamente.

4.20. Suponga que cada una de dos tiendas para artículos del hogar (llámelas tienda 1 y tienda 2) vende lavadoras de dos marcas (llámelas A y B), y además suponga que son las dos únicas tiendas de la ciudad que venden lavadoras.

La probabilidad de que alguien compre una lavadora en la tienda 1 es 3/4 y la probabilidad de que alguien que se sabe que compra una lavadora en la tienda 1 compre la marca A es 1/3. Simultáneamente la probabilidad de que alguien que se sabe que compra una lavadora en la tienda 2 compre la marca A es 1/4.

Dado que alguien compró una lavadora de la marca A ¿cuál es la probabilidad de que haya sido de la tienda 1?

4.21. Uno de los propósitos de una auditoría es el de detectar errores de procedimiento o de juicio en el asiento de información contable. Suponga que una firma de contadores está llevando a cabo una auditoría sobre las prácticas contables de una empresa en la cual la afectación de cuentas (de clientes) la hacen tanto por el Departamento de Ventas a Mayoristas como el de Ventas a Minoristas. Se sabe que el 70% de todas las cuentas son de mayoristas y mas aún, se sabe que el 10% de las cuentas de mayoristas y el 20% de las cuentas de minoristas tienen algún tipo de error contable. Si los auditores observan un error en una cuenta de clientes, encuentre la probabilidad de que sea de las de mayoristas.

4.7 Conteo de puntos muestrales (optativo)

Las secciones anteriores cubren conceptos básicos de la probabilidad y pretenden dar una visión general que permita comprender cual es el papel que juega la probabilidad al hacer inferencias. Para ilustrar esos conceptos se utilizaron ejemplos en los cuales el número total de puntos muestrales era reducido. Esto permitió que se pudieran listar los puntos muestrales de S, para poder identificar aquellos que formaban el evento de interés y así poder calcular su probabilidad. Aún cuando esos ejemplos son adecuados para el objetivo de ilustrar, en la práctica, la mayoría de los problemas tienen un número mucho mayor de puntos muestrales y una lista resulta imposible. Es por ello que se incluye esta sección opcional para aquellos que deseen mejorar su habilidad para resolver problemas. (*Nota:* para mejorar esta habilidad, se requiere además, mucha práctica.)

En esta sección, se presentan algunas reglas elementales para contar, que pueden ser de gran ayuda para resolver problemas de probabilidad con un número grande de puntos muestrales. Supóngase por ejemplo que es de interés conocer la probabilidad del evento A y que se sabe que los puntos muestrales de S son equiprobables. Entonces

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

n_A = número de puntos muestrales de A
N = número de puntos muestrales de S.

Con frecuencia se utilizan reglas de conteo para conocer los valores de n_A y N, eliminando así la necesidad de listar todos los puntos muestrales de S.

Se presentarán tres reglas elementales de conteo. La primera, conocida como la **regla *mn***, se aplica a situaciones en las que se busca el número de maneras distintas en las que se pueden formar pares de objetos (aparear objetos), en donde los objetos se seleccionan de dos grupos distintos. Por ejemplo, supóngase que existen vacantes de empleo en 4 compañías, y que en cada compañía los empleos son en cada una de las tres áreas: ventas, producción y personal. ¿En realidad cuántos tipos de vacantes hay? Se puede ver que se tienen dos conjuntos de objetos: compañías (4 de ellas) y áreas (tres). De ahí que como se ilustra en la figura 4.8, haya tres áreas para cada compañía o sea tienden poco de los mensajes comerciales, aún de aquellos específicamente diseñados para ellos. Los estudios de Ward arrojan la siguiente tabla de porcentajes de niños agrupados por edades, que no entienden los mensajes comerciales.

	EDAD		
	5 – 7	8 – 10	11 – 12
No entienden (%)	55	40	15
Entienden (%)	45	60	85

P(6 ent ∪ 9 ent) = P(6 ent) + P(9 ent) − P(6 ent ∩ 9 ent) = .45 + .60 − .27 = .78

Suponga que una compañía publicitaria muestra un comercial a un niño de 6 y a otro de 9 años en un experimento para medir su entendimiento del mensaje.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el niño de 6 años entienda el mensaje? .45

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos niños entiendan el mensaje? P(6 entienda y 9 ent) = .45 × .60 = .27

6 ent es independ a 9 entienda

c. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de ellos o ambos entiendan el mensaje? P(6 ent ∪ 9 ent) = .78

4.13. Una compañía determinada decide al principio de cada mes si gastará \$100 ó \$200 en publicidad en ese mes. Suponga que mes a mes se toma la decisión del gasto publicitario de manera independiente y que se decide por una u otra opción de gasto al azar (con la misma probabilidad se decidirá si se gastan \$100 ó \$200 en un mes cualquiera).

a. ¿Cuál es la probabilidad de que en tres meses consecutivos se hayan gastado un total de ~~\$400~~ \$500 o más?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que en tres meses consecutivos se hayan gastado \$100 cada mes?

(*Nota:* La probabilidad de la intersección de tres eventos A, B y C se descompone según la fórmula: $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$. Si A, B y C son independientes entonces se tiene $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.)

4.14. Refiérase al ejercicio 4.9 y encuentre las siguientes probabilidades:

a. $P(A_1 \cup A_2)$ .5 .5 .45

b. $P(A_1 \cup B_1)$

c. $P(A_1 \cup A_2 \cup B_2)$ P(A₁) + P(A₂) + P(B₂) − 0 − .10 − .35

d. $P(A_1 \cup A_2|B_2)$ P(A₁) + P(A₂/B₂) − P(A₁ ∩ A₂/B₂)

(*Sugerencia:* La probabilidad de la unión de tres eventos A, B y C se obtiene de la siguiente fórmula:

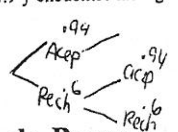
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Si A, B y C son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$.)

4.15. Refiérase al ejercicio 4.9 y suponga que un contratista para perforación realizó experimentos en tres lugares distintos habiendo encontrado "estructura cerrada" en dos de los lugares y "estructura abierta" en el restante. Si el contratista perfora en los tres lugares, encuentre la probabilidad de que encuentre exactamente dos pozos productivos y la probabilidad de que encuentre por lo menos dos pozos productivos. (Suponga que los resultados de las perforaciones en los distintos lugares son independientes entre si.)

4.16. Un comprador puede rechazar, sobre la base de evidencia obtenida a través de un plan de inspección de mercancías, un determinado lote enviado por el proveedor correspondiente. El proveedor, por otro lado, si considera que el lote que se le está rechazando es de buena calidad, puede insistir en una segunda inspección. Refiérase al ejercicio 4.11 y suponga que la probabilidad de que un lote sea aceptado es la misma tanto para la primera como para una segunda inspección. Encuentre la probabilidad de que un lote sea aceptado en la segunda inspección dado que fue rechazado en la primera inspección. .94

4.17. Un estudio reciente mostró que alrededor de 90% de las amas de casa opinan que en la publicidad se debe dar más información sobre el artículo anunciado y que a los productores se les deben requerir garantías escritas claramente explicadas. En un grupo de tres amas de casa, encuentre la probabilidad de que al menos dos de ellas estén a favor de que la publicidad debe dar esa "más información" de que habla el estudio. Suponga que las respuestas de las tres amas de casa son independientes.



4.16 P(Acept / Rech) = P(Acep ∩ Rech) / P(Rech) = (.06)(.94) / (.06)

4.6 La ley de Bayes

Cuando se habla de probabilidad condicional, se busca la probabilidad de un cierto evento A dado que otro evento B ha ocurrido. Se piensa en general que A es un evento final, de alguna manera un efecto, para el cual B es una causa

posible y que ambos se encuentran ordenados en el tiempo. Por ejemplo, piénsese en A como el evento de que "un determinado agente de seguros venda 15 pólizas" y B como el evento de que "ese determinado agente visite a 40 clientes potenciales." Claramente A y B están ordenados en el tiempo y A es un posible efecto de B. Suponga que después de saber el hecho de que el agente de seguros vendió 15 pólizas pero sin saber cuántos clientes potenciales visitó, se pregunta ¿cuál es la probabilidad de que haya visitado a 40 clientes? En otras palabras ¿cómo se puede encontrar la probabilidad de que un determinado evento B haya sido la causa de un evento final A que se sabe que ocurrió? Tales probabilidades las proporciona la ley de Bayes, que se establece a continuación sin demostrarse.

Ley de Bayes

Sea B un evento y $\bar{B}$ su complemento. Si otro evento A ocurre, entonces

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

La probabilidad $P(B|A)$ es llamada la **probabilidad a-posteriori** del evento B dado la información contenida en el evento A. Las probabilidades (incondicionales) $P(B)$ y $P(\bar{B})$ son referidas como las **probabilidades a-priori** de los eventos B y $\bar{B}$ respectivamente. En cierto sentido la ley de Bayes revisa o actualiza la probabilidad a-priori $P(B)$ incorporando en el modelo la información de que A ocurrió. Por ejemplo, si se quiere evaluar la probabilidad de que el agente de seguros haya visitado 40 clientes la semana pasada, la proporción de semanas en las cuales el agente ha visitado 40 clientes no considera a la información contenida en el evento conocido A, el hecho de que la semana pasada el agente vendió 15 pólizas. Sin embargo la probabilidad a-posteriori $P(B|A)$ utiliza tanto la información a-priori como la información reciente (ocurrió A) y es por ello que proporciona un modelo más eficiente para describir el problema en cuestión.

En algunas ocasiones, las probabilidades condicionales $P(A|B)$ y $P(A|\bar{B})$, o las probabilidades incondicionales $P(B)$ y $P(\bar{B})$ no se conocen. Cuando éste es el caso, se utilizan estimaciones de ellas, empíricas o subjetivas, con distintos grados de aproximación. Este problema se menciona con cierto detalle en el capítulo 10.

Ejemplo 4.14 Un importante almacén está considerando cambiar su política de otorgamiento de crédito para reducir el número de clientes (crédito-habientes) que finalmente no pagan sus cuentas. El gerente de crédito sugiere que en lo futuro el crédito le sea cancelado a cualquier cliente que se demore una semana o más en sus pagos en dos ocasiones distintas. La sugerencia del gerente de crédito se basa en el hecho de que en el pasado, el 90% de todos los clientes que finalmente no pagaron sus cuentas, se habían demorado en sus pagos en por lo menos dos ocasiones.

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B/A)\,P(C/AB)$ si son indep $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Mutuamente Exclus. $(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

El uso de leyes probabilísticas para calcular las probabilidades de eventos compuestos no es tan directo como el hacerlo a través de una lista de los puntos muestrales y requiere de experiencia. El procedimiento requiere que el evento se exprese como unión o intersección (o combinación de ambas) de dos o más eventos cuyas probabilidades sean, desde luego, más fáciles de calcular. Lo anterior se puede hacer de muchas maneras. En muchos de los casos puede requerirse bastante creatividad para expresar los eventos compuestos de la manera que resulte más sencillo. La utilidad de las relaciones entre eventos se torna evidente. Si el evento es una unión de eventos mutuamente excluyentes, entonces no se requieren las probabilidades de las intersecciones. Si los eventos son independientes, entonces no se requieren las probabilidades condicionales para obtener las de las intersecciones. El ejemplo 4.13 ilustra el uso de las leyes probabilísticas y las técnicas descritas en este párrafo.

Ejemplo 4.13 Por la creciente competencia entre contratistas que se dedican a la exploración petrolera, un determinado contratista ha decidido que en un lugar de exploración dado, perforará hasta en dos sitios distintos del lugar pero no más, debido a los costos. Desde luego, que si en la perforación hecha en el primer sitio se encuentra petróleo, no se llevará a cabo la segunda perforación. Si la probabilidad de que encuentre petróleo en cualquiera de las perforaciones es .2, encuentre la probabilidad de que el contratista encuentre petróleo en el lugar.

Solución Hagamos una lista de los eventos que se necesitan.

- A: se encuentre petróleo en no más de dos perforaciones
- S_1: se encuentre petróleo en la primera perforación
- S_2: se encuentre petróleo en la segunda perforación
- F_1: no se encuentre petróleo en la primera perforación
- F_2: no se encuentre petróleo en la segunda perforación

Notamos que el evento A ocurre si

1. Se encuentra petróleo en la primera perforación, S_1, o
2. No se encuentra petróleo en la primera pero si en la segunda, F_1S_2

En otras palabras,

$$A = S_1 \cup F_1S_2$$

Obsérvese que estos eventos son mutuamente excluyentes. Luego, como los eventos S_1 y F_1S_2 son mutuamente excluyentes, se tiene que

$$P(A) = P(S_1 \cup F_1S_2) = P(S_1) + P(F_1S_2)$$

Se sabe que

$$P(S_1) = P(S_2) = .2 \text{ por lo que } P(F_1) = P(F_2) = .8$$

y el hecho de que se encuentre petróleo en la primera perforación o no es independiente de lo que ocurra en la segunda. Usando la ley multiplicativa, se tiene

$$P(F_1S_2) = P(F_1)P(S_2) = (.8)(.2) = .16$$

Al sustituir se tiene

$$P(A) = P(S_1) + P(F_1S_2) = .2 + .16 = .36$$

Los pasos para calcular la probabilidad de un evento usando el procedimiento de composición de eventos puede resumirse de la siguiente manera:

Cálculo de la probabilidad de un evento: procedimiento de composición

1. Defina el Experimento.
2. Visualice la naturaleza de los puntos muestrales de manera clara. Identifique algunos puntos muestrales para cerciorarse.
3. Escriba una ecuación que exprese al evento de interés A como una composición de dos o más eventos usando alguna o las dos formas de la composición (uniones e intersecciones). Note que esto es una igualdad entre conjuntos de puntos muestrales así que verifique que el evento así definido, en efecto representa a los mismos puntos muestrales que A representa.
4. Aplique las leyes probabilísticas aditiva y multiplicativa a la ecuación obtenida en el paso 3 y encuentre así $P(A)$.

El paso 3 es el más difícil pues se pueden encontrar muchas composiciones que sean equivalentes a A. El "truco" es obtener aquella composición en la cual todas las probabilidades que se requieran en el paso 4 sean conocidas. Así, si al resolver el paso 3, se tienen en mente las probabilidades que se requerirán en el paso 4, puede seleccionarse aquella composición para la cual las probabilidades requeridas se conozcan.

El procedimiento de composición de eventos para el cálculo de una probabilidad es usualmente más poderoso que el descrito en la sección 4.2 porque no requiere del listado físico de todos los puntos muestrales de S y por ello puede usarse cuando el número de puntos muestrales es muy grande. Sin embargo, como ya se mencionó, el procedimiento es menos directo y requiere considerablemente de una mayor habilidad creativa.

Ejercicios

c) $P(\text{Bueno} \cap \text{Acept}) = P(B)\,P(\text{Acep}/\text{Bueno})$

$(.95)(.98) = .931$

4.11 Los compradores de volúmenes grandes de mercancías utilizan con frecuencia esquemas de muestreo de inspección para juzgar la calidad de las mercancías que arriban. Los lotes (abastecimientos) de mercancía son rechazados o aceptados sobre la base de los resultados obtenidos al inspeccionar algunos artículos seleccionados del lote. Suponga que un inspector de una planta procesadora de alimentos ha aceptado el 98% de los lotes que son de calidad "buena," y ha rechazado incorrectamente 2% de lotes que eran de calidad "buena." Además se sabe que el inspector acepta el 94% de todos los lotes y que sólo el 5% de los lotes son de "calidad mala."

a. Encuentre la probabilidad de que un lote sea rechazado. 6%

b. Encuentre la probabilidad de que un lote sea de calidad "buena." 95%

c. Encuentre la probabilidad de que un lote sea de calidad "buena" y que además sea aceptado.

d. Encuentre la probabilidad de que un lote sea de calidad "mala" y que sea aceptado. $.94 - .931 = .009$ (*Sugerencia:* Llame A al evento de que un lote sea aceptado y G al evento de que un lote sea de calidad buena y observe que: $P(A) = P(AG) + P(A\bar{G})$.)

e. Encuentre la probabilidad de que un lote sea aceptado dado que es de calidad "mala."

f. Encuentre la probabilidad de que un lote sea rechazado dado que es de calidad "buena."

4.12 Los mensajes comerciales de televisión se diseñan para interesar al auditorio que se espera de cada programa patrocinado. Ward,* investigador publicitario, ha observado que los niños con frecuencia en-

*S. Ward, "Children's Reactions to Commercials." Reprinted from the *Journal of Advertising Research.*

4.10. A través de un cierto corredor de bolsa, se ofrecen 100 acciones. De esas acciones, 60 son del mercado de valores local. Por otro lado, se sabe que de las 100 acciones, 30 son preferentes, de las cuales 20 son del mercado de valores local. Una persona compró a través del corredor mencionado una acción del mercado de valores local (sin saber que algunas son preferentes). Si se la dieron al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la acción que compró sea preferente?

4.5 Dos leyes de probabilidad y su uso

Como ya se ha mencionado, un procedimiento alternativo para la solución de problemas de probabilidad se basa en la composición de eventos, relaciones entre eventos y dos leyes de probabilidad que se presentan en seguida. Estas leyes pueden simplemente darse y aceptarse ya que son consistentes con el modelo hasta ahora descrito y con la realidad. La primera, llamada la **ley multiplicativa de la probabilidad** se deriva de manera directa de la definición de probabilidad condicional. Proporciona una fórmula para calcular la probabilidad de la intersección.

Ley multiplicativa de la probabilidad
Dados dos eventos A y B, la probabilidad de la intersección AB es $A \cap B$

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

Si A y B son independientes, $P(AB) = P(A)P(B)$.
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

A continuación se presenta una ilustración de la ley multiplicativa.

Ejemplo 4.11 Cuando se recibe una entrega de un proveedor, el comprador usualmente inspecciona la calidad del envío. Un almacén de descuento ha recibido 100 aparatos de televisión del proveedor, de los cuales les es desconocido que 10 están defectuosos. Si se seleccionan al azar 2 aparatos para ser sometidos a una inspección muy minuciosa, ¿cuál es la probabilidad de que ambos estén defectuosos?

Solución Se definen primero dos eventos:

evento A: el primer aparato de TV está defectuoso
evento B: el segundo aparato está defectuoso

El evento de interés es el evento AB, que ambos estén defectuosos, y

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

$P(A) = .10$ ya que hay 10 defectuosos en el lote de 100. Sin embargo $P(B|A) = \frac{9}{99}$ ya que tras de haber seleccionado el primero que resultó defectuoso, habrá 9 defectuosos restantes en el lote, ahora de 99 solamente.

Por lo tanto $P(AB) = P(A)P(B|A) = \left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{9}{99}\right) = \frac{1}{110}$

La segunda ley de probabilidad, llamada la **ley aditiva,** se utiliza para las uniones.

Ley aditiva de la probabilidad
La probabilidad de una unión $A \cup B$ es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ ya que } P(AB) = 0.$$

La ley aditiva es consistente con la realidad y con el modelo. La suma $P(A) + P(B)$ considera a la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales de $A \cup B$ pero cuenta dos veces las probabilidades de los puntos muestrales de AB. Es por ello que al restar $P(AB)$ se obtiene el resultado correcto.

Ejemplo 4.12 En una edición de mayo de 1975 de la revista "Wall Street Journal" (denotémosla "WSJ") se reportaba que según una encuesta llevada a cabo por esta revista, el 40% de sus suscriptores leían regularmente la revista "Time"; el 32% de sus suscriptores leían regularmente la revista "U.S. News and World Report" y que el 11% de sus suscriptores leían regularmente ambas.

Se definen los eventos A y B como

A: evento de que un suscriptor del "WSJ" lea el "Times"
B: evento de que un suscriptor del "WSJ" lea el "U.S. News and World Report"

Encuentre las probabilidades de los eventos A, B, AB y $A \cup B$.

Solución El experimento consiste en seleccionar al azar a un suscriptor del "WSJ" y registrar qué revistas (de las mencionadas) lee regularmente. Un punto muestral corresponde a la selección de un suscriptor y el hecho de hacer una selección al azar implica que estos puntos muestrales son equiprobables. Como 40% de todos los suscriptores del "WSJ" leen el "Time." 40% de los puntos muestrales de S están en el evento A, por lo cual

$$P(A) = .4$$

De manera análoga,

$$P(B) = .32$$

Como el 11% de los suscriptores del "WSJ" leen ambas,

$$P(AB) = .11; \text{ de donde}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = .40 + .32 - .11 = .61$$

B se dirán **mutuamente excluyentes** si cuando uno ocurre, el otro no puede ocurrir. Otro modo de decir lo mismo es que la intersección AB no contiene a ningún punto muestral. Se sigue entonces que $P(AB) = 0$.

Definición

Dos eventos A y B se dicen ser **mutuamente excluyentes** si el evento AB no contiene ningún punto muestral.

Los eventos mutuamente excluyentes no tienen ninguna área en común cuando se representan por diagramas de Venn (vea la figura 4.7).

Ejemplo 4.9 ¿Los eventos A, B del ejemplo 4.1 son mutuamente excluyentes? ¿Son complementarios? ¿Independientes?.

Solución

evento A: E_1, E_3, E_5
evento B: E_1, E_2, E_3

El evento AB es el conjunto de puntos muestrales que están en ambos A y B. Se puede ver que AB consiste de los puntos E_1 y E_3, y que $P(AB)$ no es igual a 0. De ahí que A y B no puedan ser mutuamente excluyentes. Tampoco son complementarios pues B no consta de todos los puntos de S que no están en A.

Para verificar la independencia, se utiliza la definición. Esto es, se debe verificar si $P(A|B) = P(A)$. Del ejemplo 4.8, $P(A|B) = \frac{2}{3}$ y, como $P(A) = \frac{1}{2}$, se tiene

$$P(A|B) \neq P(A)$$

y por su definición, los eventos A y B son entonces dependientes.

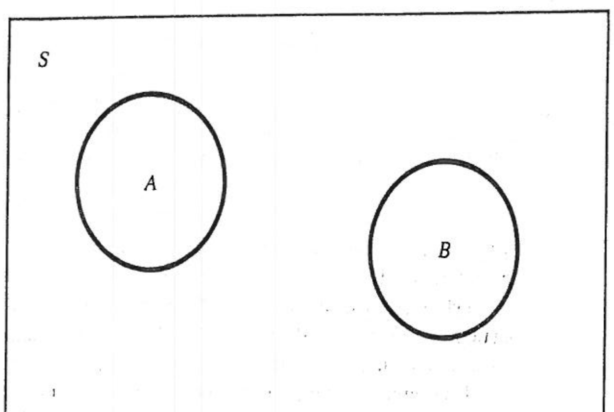


Figura 4.7 *Eventos mutuamente excluyentes.*

Ejemplo 4.10 La experiencia indica que un determinado tipo de negociación obrero-patronal ha resultado en la firma de un convenio dentro de dos semanas de pláticas el 50% de las veces. También la experiencia indica que el fondo de soporte monetario para la huelga ha sido adecuado para soportar la huelga el 60% de las veces y que ambas de estas condiciones se han satisfecho el 30% de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que en una negociación determinada se logre una firma de convenio dentro de dos semanas de pláticas dado que se tiene un fondo adecuado para la huelga? ¿Es la firma de convenio dentro de dos semanas dependiente de si se tiene o no un fondo adecuado para la huelga?

Solución Se definen primero los eventos:

evento A: se firma convenio dentro de dos semanas de pláticas
evento B: el fondo de soporte para huelga es adecuado

Se desea encontrar $P(A|B)$, con base en $P(A) = .50$, $P(B) = .60$ y $P(AB) = .30$. Se tiene

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{.30}{.60} = .50$$

Para determinar si los eventos son o no independientes, observe que

$$P(A|B) = P(A) = .50$$

que por definición indica que sí son independientes.

Ejercicios

4.7. Refiérase al ejercicio 4.4 y suponga que los dos dados son distinguibles por el color: uno es rojo y otro verde. Utilizando las definiciones en las secciones 4.2, 4.3 y 4.4, encuentre las probabilidades para cada uno de los eventos que siguen:

$P(A)=1/6$ A: Observe un 2 en el dado rojo
$P(B)=1/2$ B: observe un número par en el dado rojo
$P(C)=1/6$ C: observe una suma en ambos dados de 7
$P(D)=1/9$ D: observe una suma en ambos dados de 9
$P(E)=1/6$ E: $C|A$ independiente
$P(F)=\emptyset$ F: $D|A$ excluyente
$P(G)=1/6$ G: $C|B$ indep

4.8. Si es sabido que la probabilidad de que la demanda diaria de un determinado artículo, exceda dos unidades es de 9/10, ¿cuál será la probabilidad de que esa demanda sea menor que tres unidades?

$P(<3) = P(0) + P(1) + P(2)$
$1 - 9/10 = 1/...$

4.9. Los contratistas para perforación de pozos petroleros, realizan siempre antes de perforar, un experimento, consistente en registrar el comportamiento del subsuelo ante pequeñas explosiones. Si se detecta lo que ellos llaman una "estructura cerrada" en el subsuelo, se considera ésta un indicio prometedor, mientras que si no se detecta estructura, la probabilidad de un hallazgo de pozo productivo es menor. La tabla que se da a continuación resume la experiencia lograda en muchos lugares en donde se perforó tras de haber efectuado el experimento con los explosivos.

	B_1 NO SE DETECTA ESTRUCTURA CERRADA	B_2 SI SE DETECTA ESTRUCTURA CERRADA
A_1, pozo no productivo	.40	.10
A_2, pozo productivo	.15	.35

Calcule las siguientes probabilidades, descríbalas en términos del problema original, e interprételas.

$P(A_1)$, $P(\bar{A}_1)$, $P(A_1|B_1)$, $P(A_2|B_1)$,
$P(A_1B_2)$, $P(B_2|A_2)$, $P(A_2|A_1)$

$P(A_1|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{.40}{.55}$
$P(A_2|B_2) = \frac{.35}{...}$

porción es llamada la **probabilidad condicional** de A dado B. Puede ser que sea igual a $P(A)$ pero en este ejemplo se esperaría que sea mayor dado que se espera lluvia con mayor facilidad si es que está nublado. La probabilidad condicional de A dado que B ocurrió se denota por

$$P(A|B)$$

en donde la línea vertical dentro del paréntesis se lee "dado" y los eventos a la derecha de la línea son los que han ocurrido.

Se define la probabilidad condicional de B dado A y de A dado B en el siguiente cuadro.

Definición

La **probabilidad condicional** de B dado que A ha ocurrido, es

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

La **probabilidad condicional** de A dado que B ha ocurrido, es

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \qquad \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Se puede observar que estas definiciones son consistentes con la interpretación de frecuencia relativa de la probabilidad, simplemente asociando algunos números a las probabilidades del ejemplo meteorológico. Recuerde que A quiere decir lluvia en un determinado día; B quiere decir nublado. Suponga que 10% de todos los días son lluviosos y nublados (esto es $P(AB) = .10$) y 30% de todos los días son nublados (esto es $P(B) = .30$).

La situación descrita se muestra gráficamente en la figura 4.6. Cada punto muestral del evento B está asociado con un día nublado. Como 30% de todos los días serán nublados, podemos imaginar el área de B en la figura 4.6 como .3. Una tercera parte (10%/30%) de estos días nublados son lluviosos, éstos son los marcados con el área sombreada. Luego entonces, si se selecciona un día de entre todos los días de la población, ¿cuál será la probabilidad de que sea lluvioso dado que es nublado? Esto es ¿cual es $P(A|B)$?

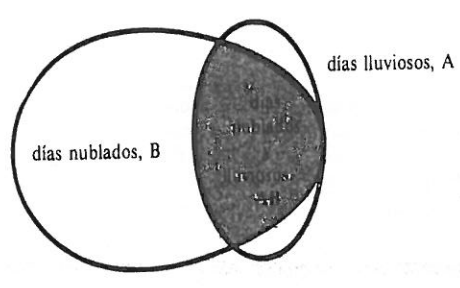


Figura 4.6 *Eventos A y B*

Dado que se sabe que el día es nublado, entonces el punto seleccionado debe pertenecer a B (figura 4.6). Una tercera parte de estos días resultan en lluvia. De ahí que la probabilidad de que se seleccione un día lluvioso dado que es nublado es

$$P(A|B) = \tfrac{1}{3}$$

Puede verse que se está de acuerdo con la definición para $P(A|B)$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{.10}{.30} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 4.8 Calcule $P(A|B)$ para el experimento de lanzar un dado descrito en el ejemplo 4.1.

Solución Los eventos A y B son

evento A: se observa un número impar (E_1, E_3, E_5)
evento B: se observa un número menor que 4 (E_1, E_2, E_3)

Dado que B ha ocurrido, sólo interesan los puntos muestrales E_1, E_2, y E_3 que ocurren con la misma frecuencia. De éstas, E_1, y E_3 implican al evento A; luego,

$$P(A|B) = \tfrac{2}{3}$$

O utilizando la fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

Nótese que $P(A|B) = \tfrac{2}{3}$ mientras que $P(A) = \tfrac{1}{2}$, lo que indica que A y B dependen entre sí.

Definición

Dos eventos A y B se dicen ser **independientes** si

$$P(A|B) = P(A) \text{ o bien } P(B|A) = P(B)$$

En caso contrario, los eventos se dirán ser **dependientes.**

Si se expresa la definición anterior verbalmente, se dice que dos eventos son independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos no cambia la probabilidad de ocurrencia del otro.

Obsérvese que si $P(A|B) = P(A)$ entonces también $P(B|A) = P(B)$ y, análogamente, si $P(A|B)$ y $P(A)$ son distintas entonces $P(B|A)$ y $P(B)$ serán distintas también.

Una tercera e importante relación entre eventos se mencionó más no se definió específicamente, al hablar de eventos simples. Recuerde que un experimento resulta en la ocurrencia de uno y sólo un evento simple. No es posible que dos eventos simples ocurrán al mismo tiempo. En general dos eventos A y

Defina los eventos A, B, $A \cup B$ y AB como colecciones de puntos muestrales.

Solución Recordará que los puntos muestrales de este experimento son

E_1: CC (cara en la primera y cara en la segunda)
E_2: CX
E_3: XC
E_4: XX

La ocurrencia de los puntos muestrales E_1, E_2, y E_3 implica y de hecho define al evento A. Los otros eventos se obtienen de manera similar.

evento B: E_2, E_3, E_4
evento AB: E_2, E_3
evento $A \cup B$: E_1, E_2, E_3, E_4

Nótese que $A \cup B = S$, que es el espacio muestral y que ciertamente ocurre siempre. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

P' eventos excluyentes

Ejercicios

4.4. Considere el siguiente experimento. Tirar dos dados balanceados con 6 caras cada uno y observar la suma de las dos caras superiores.
a. Haga una lista de los puntos muestrales de S.
b. Haga una lista de los puntos muestrales de los siguientes eventos
- A: se observa un 2 $S_A = \{(1+1)\}$ $P(A) = 1/36$
- B: se observa un 7 $P(B) = 6/36 = 1/6$
- C: se observa una suma menor que 7 $P(C) = 15/36$
- D: se observan ambos A y C $A \cap C = \{(1+1)\}$
- E: se observan ambos B y C $B \cap C = \emptyset$
- F: se observa A o C o ambos $A \cup C$ $P(F) = 15/36$

c. Calcule las probabilidades de A; B, C, D, E y F sumando las probabilidades de los puntos muestrales apropiados.

4.5. Un fabricante de equipo de cómputo ha indicado que la demanda mensual de minicomputadoras de su firma es entre una y siete. Haga una lista de los puntos muestrales de S y de los puntos muestrales que forman cada uno de los eventos descritos a continuación:
a. A. dos minicomputadoras se venden en un mes determinado
b. B. se venden menos de cuatro
c. C. se venden no más de cinco
d. D. se venden por lo menos tres
e. AB
f. $A \cup B$

Si se supone que cualquier nivel de demanda (dentro del rango de 1 a 7) es igualmente posible (probable), calcule las probabilidades de A, B, C, AB, $A \cup B$ sumando las probabilidades de los puntos muestrales apropiados.

4.6. Un inversionista cuenta con la opción de invertir en dos de cuatro tipos de acción de bolsa. El inversionista ignora que de esos cuatro tipos, sólo dos aumentarán sustancialmente de valor dentro de los próximos cinco años. Si el inversionista elige los dos tipos de acción al azar, haga una lista de los puntos muestrales de S y asimismo haga una lista de los puntos muestrales de los siguientes eventos:
a. A: por lo menos uno de los tipos de acción redituable fue escogido
b. B: por lo menos uno de los tipos de acción no redituable fue escogido
c. AB
d. $A \cup B$

Construya un diagrama como el de la figura 4.3 para exhibir el evento $A \cup B$; después otro como el de la figura 4.4 para exhibir AB.

4.4 Relaciones entre eventos

Se definirán tres relaciones entre eventos: **eventos complementarios, eventos independientes** y **eventos mutuamente excluyentes.** En muchas instancias, se preguntará si dos o más eventos tienen una relación particular entre sí. Para verificar cada una de las relaciones se utilizará su definición, como se verá más adelante, y se utilizará dicha definición como auxilio en la evaluación de probabilidades (sección 4.5).

Definición
El **complemento de un evento A** es la colección de todos aquellos puntos muestrales que están en el espacio muestral S pero que no están en A. El complemento de A se denota por $\bar{A}$.

Utilizando un diagrama de Venn, los complementos se muestran como en la figura 4.5.
Dado que se sabe que

$$\sum_S P(E_i) = 1$$

se tiene que

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

y así se obtiene una ecuación de gran utilidad para obtener $P(A)$ cuando $P(\bar{A})$ es conocido:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Con frecuencia dos eventos se encuentran relacionados de manera tal que la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos depende de si el otro ha ocurrido o no. Por ejemplo, suponga que el experimento consiste en hacer observaciones meteorológicas en un día determinado. Suponga que el evento A es "observar lluvia" y B el evento "observar cielo nublado." Los eventos A y B se encuentran obviamente relacionados. La probabilidad $P(A)$ de lluvia no es la misma que la probabilidad de lluvia dado que el cielo está nublado. $P(A)$ se basa en la fracción de la población que resulta en lluvia mientras que si se considera a la subpoblación que resulta en cielo nublado y de ahí, la fracción que resulta en lluvia, se tendría la probabilidad de "lluvia" dado "nublado." Esta última pro-

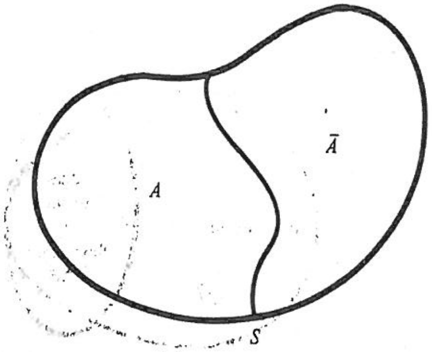


Figura 4.5 *Eventos complementarios*

Suponiendo que el dado está balanceado, calcule las probabilidades de A, B y C sumando las probabilidades de los puntos muestrales apropiados.

4.2. La mesa directiva de una escuela pública determinada consiste de cinco miembros de la comunidad, dos de los cuales son licenciados en derecho. El alcalde de la ciudad planea seleccionar dos de los cinco miembros de esta mesa directiva al azar, para constituir un subcomité que debe negociar con el organismo laboral del profesorado de esa escuela. El interés es en la composición de ese subcomité.

a. Defina el experimento.

b. Haga una lista de los puntos muestrales de S.

c. Si todas las posibles parejas de miembros de la mesa directiva tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas, ¿cuál es la probabilidad de que el subcomité quede constituído por los dos licenciados en derecho? 1/10

d. ¿Cuál es la probabilidad de que el subcomité tenga al menos un licenciado? ¿Cuál sería de que no tenga licenciados?

4.3. Un fondo para el desarrollo de la pequeña industria fue constituído para canalizar inversiones privadas al apoyo de pequeñas industrias. En una ciudad determinada, suponga que se encuentran cuatro agencias de este fondo y suponga también que dos industrias pequeñas han decidido solicitar un préstamo de este fondo. Si cada una de las dos industrias seleccionan al azar a una de las cuatro agencias para solicitar su préstamo.

a. Defina el experimento.

b. Haga una lista de los puntos muestrales de S.

c. Encuentre la probabilidad de que ambas industrias soliciten su préstamo en la misma agencia. 1/4

d. Encuentre la probabilidad de que las dos industrias soliciten su préstamo en distinta agencia. 3/4

D, D₂ 1 2 3

b) S = {(D₁D₂), (D₁1), (D₁2), (D₁3), (D₂1), (D₂2), (D₂3), (12), (13), (23)}

A1 I1 S = {(I1A1), (I1A2), (I1A3), (I1A4),
A2 I2 (I2A1), (I2A2), (I2A3), (I2A4)}
A3
A4 1/4

c) P(D₁D₂) = 1/10

d) P(Al menos 1 Lic. der) =

P(D₁D₂) + P(D₁1) + P(D₁2) + P(D₁3) + P(D₂1) + P(D₂2) + P(D₂3) = 7/10

e) P(No Lic) = P(12) + P(13) + P(23) = 3/10

4.3 Eventos compuestos

La mayoría de los eventos que se encuentran en situaciones prácticas son compuestos y constan de un gran número de puntos muestrales. Por fortuna existe un procedimiento alternativo para calcular la probabilidad de eventos compuestos. Este segundo procedimiento no requiere de la elaboración de una lista de los puntos muestrales y por ende es mucho menos tedioso y tardado. Se basa en cierta clasificación de eventos, relaciones entre eventos y en dos leyes probabilísticas que se discuten en las secciones 4.4 y 4.5.

Como su nombre lo indica, los eventos compuestos están formados por una composición de dos a más eventos. La composición puede hacerse de dos maneras, una **unión** o una **intersección,** o una combinación de ambas.

Definición

Sean A y B dos eventos en el espacio muestral S. La *unión* de A y B es el evento que contiene a todos los puntos muestrales de A o de B o de ambos. Se denota a la unión de A y B por el símbolo $A \cup B$.

Si se define en lenguaje llano, una unión es el evento de que A o B o **ambos** ocurran. Por ejemplo, en el ejemplo 4.1, se tenía

evento A: E_1, E_3, E_5
evento B: E_1, E_2, E_3

La unión $A \cup B$ es la colección de puntos E_1, E_2, E_3 y E_5. Esto se muestra gráficamente en la figura 4.3.

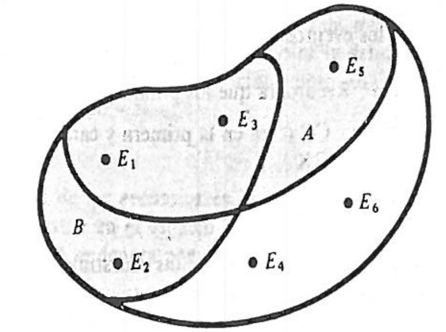


Figura 4.3 *Evento $A \cup B$ del ejemplo 4.1: $A \cup B$ representado por el área sombreada*

Definición

Sean A y B dos eventos en el espacio muestral S. La **intersección** de A y B es el evento que contiene a los puntos muestrales que están en ambos A y B. La intersección de los eventos A y B se representa por el símbolo AB. (Muchos autores utilizan $A \cap B$.)

La intersección AB es el evento de que ambos A y B ocurran. Aparecería en un diagrama de Venn como el área común de A y B. La intersección AB del ejemplo 4.1, es el evento consistente en los puntos E_1 y E_3. Si cualquiera de E_1 ó E_3 ocurren entonces ambos A y B ocurren. Esto se muestra gráficamente en la figura 4.4.

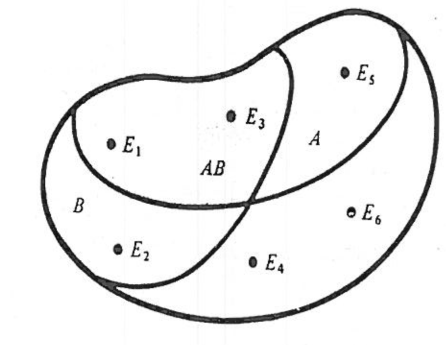


Figura 4.4 *Evento* AB *del ejemplo 4.1;* AB *representado por el área sombreada*

Ejemplo 4.7 Refiérase al experimento del ejemplo 4.3, en el cual se lanzan dos monedas y defina los eventos A y B como

evento A: al menos una cara
evento B: al menos una cruz

$$P(A) = P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 4.6 El gerente de personal de una compañía desea contratar a dos agentes de ventas de un total de cuatro solicitantes. Suponga que no sabe las potencialidades de cada uno de los solicitantes y que de hecho selecciona dos al azar de los cuatro.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione a los dos mejores?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione al menos uno de los dos mejores?

Solución El experimento consiste en seleccionar dos de los cuatro solicitantes al azar. Suponga que los solicitantes varían en cuanto a sus capacidades y habilidades y denote por 1, 2, 3 y 4 a los solicitantes en donde 1 es el mejor, 2 el que le sigue y así sucesivamente. Los puntos muestrales de S entonces, son los mostrados en la siguiente tabla.

PUNTO MUESTRAL	PAR SELECCIONADO	PROBABILIDAD
E_1	1, 2	1/6
E_2	1, 3	1/6
E_3	1, 4	1/6
E_4	2, 3	1/6
E_5	2, 4	1/6
E_6	3, 4	1/6

Como se espera que cada uno de los seis pares ocurra más o menos con la misma frecuencia relativa en un número grande de repeticiones del experimento, se ha asignado una probabilidad de 1/6 a cada punto muestral.

a. Defina al evento A como "el gerente de personal selecciona a los dos solicitantes mejores". Como A ocurre sólo si E_1 ocurre, se tiene

$$P(A) = P(E_1) = \frac{1}{6}$$

b. Defina el evento B como "el gerente de personal selecciona a por lo menos uno de los dos mejores". Como B ocurre si E_1, E_2, E_3, E_4, ó E_5 ocurren, se tiene

$$P(B) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Note la implicación de las soluciones para a. y b. Dado que la selección que pudiera hacer un gerente de personal es muy superior a una elección al azar, $P(A)$ y $P(B)$ deben ser en realidad mucho mayores que las que se han calculado seleccionando al azar.

Como habrá podido observar, el procedimiento para calcular la probabilidad de un evento, sumando las probabilidades de sus puntos muestrales requiere de los siguientes pasos.

Cálculo de la probabilidad de un evento: procedimiento por puntos muestrales

1. Defina el experimento.
2. Haga una lista de los eventos simples asociados al experimento y verifique que ya no pueden descomponerse. Esto define al espacio muestral S.
3. Asigne probabilidades (racionalmente) a los puntos muestrales de S, verificando que $\sum_S P(E_i) = 1$.
4. Defina el evento de interés A como una colección específica de puntos muestrales. (Un punto muestral está en A si A ocurre cuando ese punto muestral ocurra. Verifique para cada punto muestral de S si está o no está en A.)
5. Encuentre $P(A)$ simplemente sumando las probabilidades de los puntos muestrales de A.

La evaluación de la probabilidad de un evento por medio de los cinco pasos descritos en el cuadro es sistemática y proporciona la solución correcta si estos pasos se siguen correctamente. Una fuente importante de errores es el no definir claramente el experimento (paso 1) y luego no especificar correctamente los eventos simples (paso 2). Una segunda fuente de errores es el no asignar probabilidades válidas a los puntos muestrales. Cuando el número de puntos muestrales es muy grande, el método no sólo se vuelve tedioso sino que en muchos casos inmanejable con excepción de casos en los que los puntos muestrales son equiprobables. En este último caso, las sumas se convierten simplemente en conteos, que se realizan utilizando las reglas de la sección 4.7.

El procedimiento que se ha descrito permite construir un modelo probabilístico para la población que, además de tener cierta elegancia, es de gran utilidad. El modelo proporciona un método directo, simple y lógico de calcular la probabilidad de un evento, o si se quiere, la probabilidad de una muestra extraída de una población teórica. Aquellos estudiantes ya familiarizados con problemas de probabilidad reconocerán la ventaja de contar con un método sistemático de solución. Las desventajas por otro lado, aparecen en cuanto se observa que el listar los puntos muestrales puede ser tedioso y que se debe verificar que ninguno se haya omitido. En ocasiones el número de puntos del espacio muestral puede ser del orden de los millones.

Sin ánimo de hacer una discusión más profunda en este sentido, sólo cabe agregar que existen métodos matemáticos que simplifican el procedimiento de conteo. Algunos teoremas de gran utilidad para el conteo de puntos muestrales se pueden encontrar en la sección 4.7 y en textos de análisis combinatorio. En las siguientes secciones se verá un segundo método para evaluar la probabilidad de un evento.

Ejercicios

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$

4.1. Un experimento consiste en lanzar un dado de seis caras. Especifique los puntos muestrales de los eventos que siguen:

S: el espacio muestral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
A: se observa el 4 $S_A = \{4\}$ $P(A) = P(4) = 1/6$
B: se observa un número par $S_B = \{2,4,6\}$
C: se observa un número menor que 3 $S_C = \{1,2\}$

$P(B) = P(PAR) = P(2)+P(4)+P(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(C) = P(1) + P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

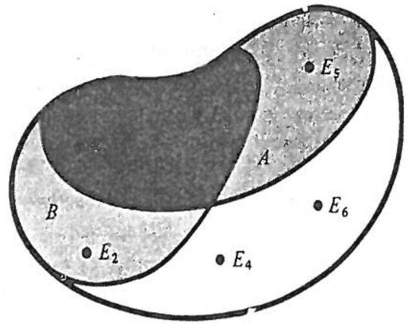


Figura 4.2 *Los eventos A y B para el lanzamiento del dado*

un número grande (N) de veces y de éstas el evento A ocurre n_A veces, la probabilidad de A es

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

Esta manera práctica de ver a la probabilidad, una manera utilizada por los no-estadísticos, es referida como el **concepto de probabilidad desde el punto de vista de la frecuencia relativa.**

En la práctica, rara vez se conoce la composición de la población, de ahí que las probabilidades de los distintos eventos sean desconocidas. Desde el punto de vista matemático, se ignora este aspecto del problema y se toman las probabilidades como dadas, produciendo así un modelo para la población. Por ejemplo, se puede suponer una población grande de lanzamientos de dado para el ejemplo 4.1 con

$$P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_6) = \tfrac{1}{6}$$

Esto es, se supone que el dado está perfectamente balanceado y que por ello, cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 aparecerán con una frecuencia relativa aproximadamente igual dentro de un número grande de lanzamientos. ¿Existirá tal cosa como un dado perfectamente balanceado? Probablemente no, pero parece razonable inclinarse a pensar que las probabilidades de los puntos muestrales estarán tan cercanas a 1/6 que para todo propósito práctico el modelo es válido para el lanzamiento del dado.

Se completa la descripción del modelo, adicionando las condiciones del siguiente cuadro.

A cada punto del espacio muestral se asigna un número llamado la probabilidad de E_i, denotado por el símbolo $P(E_i)$, tal que:

1. $0 \leq P(E_i) \leq 1$, para cada i
2. $\sum_S P(E_i) = 1$

en donde el símbolo $\sum_S$ quiere decir la suma sobre todos los puntos muestrales de S.

sumatoria del espacio muestral

Las dos condiciones impuestas, son necesarias para que el modelo responda a la interpretación desde el punto de vista de la frecuencia relativa. Se pide que una probabilidad sea mayor o igual a 0 y menor o igual a 1 y que la suma de las probabilidades sobre todo el espacio muestral S sea 1. Más aún, desde un punto de vista práctico, se escogerán las $P(E_i)$ de un modo realista, que se apegue a las frecuencias relativas de ocurrencias de los puntos muestrales.

Teniendo en mente que un evento determinado es una colección específica de puntos muestrales, se puede establecer una regla sencilla para encontrar la probabilidad de cualquier evento.

Definición

La probabilidad de un evento A es igual a la suma de las probabilidades de los puntos muestrales de A.

Nótese que la definición está de acuerdo con el concepto intuitivo de probabilidad.

Ejemplo 4.4 Calcule la probabilidad del evento A en el experimento del lanzamiento del dado del ejemplo 4.1.

Solución El evento A, "observe un impar", incluye a los puntos muestrales E_1, E_3 y E_5, luego

$$P(A) = P(E_1) + P(E_3) + P(E_5) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}$$

Ejemplo 4.5 Calcule la probabilidad de observar exactamente una "cara" en el lanzamiento de dos monedas.

Solución Construya el espacio muestral, denotando por C y X a "cara" y "cruz" respectivamente.

EVENTO	PRIMERA MONEDA	SEGUNDA MONEDA	$P(E_i)$
E_1	C	C	1/4
E_2	C	X	1/4
E_3	X	C	1/4
E_4	X	X	1/4

Parece razonable asignar una probabilidad de 1/4 a cada uno de los puntos muestrales. El evento de interés, evento A, "observe exactamente una cara" incluye a los puntos muestrales E_2 y E_3 y sólo a ellos. Luego, Los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_6$, representan una lista completa de todos los eventos simples asociados con el ejemplo 4.1. Una propiedad interesante de los eventos simples parece hacerse evidente. **Un experimento resulta en la ocurrencia de uno y sólo uno de los eventos simples.**

Definición
Un evento que no puede ser descompuesto es llamado **evento simple.** Los eventos simples se denotan por la letra E con subíndice.

Como ejemplo, si un dado es lanzado, se observará el 1 ó 2 ó 3, . . . , ó 6 pero no sería posible observar más de uno de estos eventos simples al mismo tiempo. De ahí que una lista de todos los eventos simples de un experimento permita una descripción de todos los posibles resultados del mismo. Para propósitos de ilustración, considere los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.2 Lance una moneda. Los eventos simples son,

E_1: se observa cara
E_2: se observa cruz

(Se denotan por *cara* y *cruz* los dos lados de una moneda.)

Ejemplo 4.3 Lance dos monedas. Los eventos simples son:

EVENTO	MONEDA 1	MONEDA 2
E_1	cara	cara
E_2	cara	cruz
E_3	cruz	cara
E_4	cruz	cruz

Sería muy conveniente que el modelo que se construya para un experimento, pueda representarse gráficamente. Se hace esto, haciendo corresponder a los eventos simples con un conjunto de puntos. A cada evento simple se le asocia un punto, llamado **punto muestral.** Así, el símbolo E_1 puede representar al evento simple E_1 así como su punto muestral correspondiente. El diagrama resultante, o sea el modelo gráfico-visual, es llamado un **diagrama de Venn.**

El ejemplo 4.1 puede ser visto simbólicamente en términos del diagrama de Venn mostrado en la figura 4.1. Se muestran seis puntos muestrales correspondientes a los seis eventos simples enumerados en el ejemplo 4.1. Del mismo modo, un diagrama de Venn para el experimento del lanzamiento de 2 monedas, del ejemplo 4.3, tendrá cuatro puntos muestrales.

Definición
El conjunto de todos los puntos muestrales de un experimento es llamado **espacio muestral** y es representado por el símbolo S. Se dice que S es la totalidad de puntos muestrales.

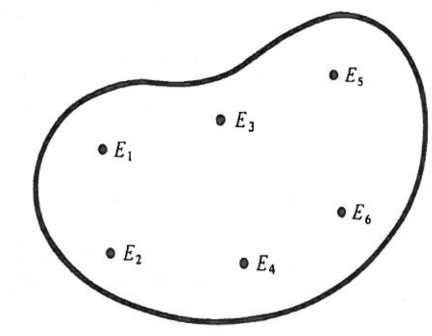


Figura 4.1 *Diagrama de Venn para el lanzamiento de un dado*

¿Qué es un evento en términos de puntos muestrales? Se recordará que el evento A del ejemplo 4.1 ocurría si cualquiera de los eventos simples E_1, E_3 ó E_5 ocurría. Esto es, se observa el evento A, un número impar, si se observa el 1, el 3 ó el 5. El evento B, un número menor que 4, ocurre si E_1, E_2 ó E_3 ocurre. Así que, si un evento ocurre sólo si uno de un conjunto particular de puntos muestrales ocurre, el evento queda perfectamente definido al haber hecho esta descripción verbal. El evento, "observe E_1, E_3 ó E_5" es obviamente el mismo que el evento "observe un número impar". Esto permite que se defina un evento particular como una colección específica de puntos muestrales.

¿Cómo se decide si un punto muestral se incluye o no en un evento? Simplemente se verifica si la ocurrencia del punto muestral implica la ocurrencia del evento. Si ese es el caso, debe incluirse. Por ejemplo, en el experimento del dado, el punto muestral E_1 está en el evento A ya que si E_1 ocurre (se observa 1), entonces A ocurre (se observa impar).

Definición
Un **evento** es una colección específica de puntos muestrales.

Mantengamos presente que la discusión previa se refiere al resultado de un solo experimento y que la realización del experimento producirá la ocurrencia de uno y sólo uno de los puntos muestrales; luego, un determinado evento se dirá haber ocurrido, si cualquiera de los puntos muestrales que lo componen ocurrió.

Un evento puede representarse en un diagrama de Venn simplemente encerrando aquellos puntos muestrales del evento. Los eventos A y B para el problema del lanzamiento del dado se muestran en la figura 4.2. Observe que los puntos E_1 y E_3 están en ambos eventos A y B y que A y B ocurrirán simultáneamente si E_1 ó E_3 ocurren.

Las poblaciones de observaciones se obtienen al repetir un experimento un gran número de veces. Una fracción de estas veces resultará en la ocurrencia de E_1, otra fracción en la de E_2 y así sucesivamente. Desde un punto de vista práctico, se piensa en la fracción de veces que resulta el evento A como la probabilidad de A. Describiéndolo de otra manera, **si un experimento se repite**

Si, de hecho, el supuesto de que los consumidores prefieren A es verdadero, entonces la fracción de consumidores que reportarían 1 es mayor que 1/2, y se esperaría que en la muestra se observe una fracción cercana a esta fracción poblacional. Si ninguno de los consumidores de la muestra prefirió A, nótese que tal resultado es altamente improbable si al menos la mitad de los consumidores potenciales prefiere a A. ¿Qué se decide? O bien se concluye que se observó una muestra muy improbable o que el supuesto original es falso y que en realidad menos de la mitad de los consumidores prefieren el envase A. La noción que queda implícita y sobre la cual descansa el razonamiento anterior es la de probabilidad; en particular la de probabilidad de haber observado determinados resultados muestrales.

En el párrafo anterior, se encontró que los resultados muestrales resultaron tan discordantes del supuesto original que se tuvo que rechazar tal supuesto, de inmediato. Considere sin embargo qué pasaría si 3 de los 20 consumidores de la muestra hubiesen preferido A y 17 a B. ¿Se concluiría todavía que dado que la muestra es tan improbable se rechaza el supuesto original? ¿Qué pasaría si 8 hubieran preferido A y 12 a B? ¿Qué se concluiría respecto a la suposición original?

Para contestar a las preguntas anteriores se debe saber qué tan improbable es cada uno de los resultados muestrales.

En otras palabras, se necesita encontrar la probabilidad de ocurrencia de una muestra tan (o más) contradictoria que la observada, bajo el supuesto original, esto es, suponiendo que la consideración hecha sobre las proporciones poblacionales es verdadera. Tras de haber encontrado esa probabilidad se estará en posición de juzgar si la suposición es razonable o debe ser rechazada por falsa. Se concluye que la probabilidad proporciona el mecanismo necesario para hacer inferencias acerca de una población, sobre la base de evidencia muestral.

4.2 El espacio muestral

Los datos son obtenidos al observar eventos no controlables en la naturaleza o bien bajo condiciones controladas en un laboratorio. Con el objeto de simplificar la terminología convéngase en una sola palabra que sea utilizada para describir cualquiera de los dos procedimientos de recolección de información (o datos). Se define el concepto de **experimento.**

Definición

Un experimento es el proceso por medio del cual una observación (o medición) es registrada.

Nótese que la observación no necesariamente produce un valor numérico. Algunos ejemplos típicos son los siguientes:

1. Registrar el ingreso anual de un trabajador en una planta.
2. Entrevistar a un consumidor para determinar la marca preferida de un producto determinado.
3. Registrar el valor de una acción de bolsa en un momento determinado.
4. Inspeccionar una línea de ensamblaje para determinar si el número de artículos defectuosos excede a los especificados.
5. Registrar el tipo y el monto de una póliza vendida por un agente de seguros.

De hecho, una población es el conjunto de observaciones asociado a un conjunto de unidades experimentales que son de interés. De ahí que conceptualmente, pueda generarse una población repitiendo un experimento. Por ejemplo, si el interés es en la vida de los tubos pantalla de televisión producidos en determinada planta durante el mes de junio, se puede probar un tubo hasta que falle y éste será el resultado de un solo experimento. La repetición de este experimento para cada uno de los tubos producidos en esa planta durante el mes de junio generaría a la población. Una muestra consistiría en los resultados de un grupo de experimentos seleccionados de la población anterior.

A continuación se verá con más detalle el análisis de algunos experimentos , la construcción de un modelo matemático para la población. Un beneficio marginal de este desarrollo será el de contar con un enfoque directo y sistemático de los problemas de probabilidad.

Se empieza haciendo notar que cada experimento produce uno o varios resultados posibles que le llaman **eventos** y que se denotan por mayúsculas. Considere el experimento siguiente:

Ejemplo 4.1 Lance un dado y observe el número que aparece en la cara superior. Algunos eventos son:

evento A: se observa un número impar
evento B: se observa un número menor que 4
evento E_1: se observa el 1
evento E_2: se observa el 2
evento E_3: se observa el 3
evento E_4: se observa el 4
evento E_5: se observa el 5
evento E_6: se observa el 6

Estos eventos no representan a la totalidad de eventos posibles asociados a un experimento, pero son suficientes para propósitos de ilustración. Habrá notado la diferencia entre los eventos A y B y los eventos E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, y E_6. El evento A ocurrirá si el evento E_1, E_3, o E_5 ocurre, esto es, si se observa 1, 3 o 5. En otras palabras A puede ser **descompuesto** (descrito) como una colección de eventos más simples, a saber E_1, E_3, y E_5. De manera análoga, B ocurrirá si E_1, E_2, o E_3 ocurre y puede verse como una colección de eventos más simples. En contraposición a lo anterior, nótese que es imposible descomponer a cualquiera de los eventos E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, o E_6. Estos eventos son llamados **eventos simples** y A y B son **eventos compuestos.**

Variables Aleatorias(v.a)

Concepto: una variable aleatoria es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.

Se usarán letras mayúsculas para denotar a una v.a y letras minúsculas para denotar los valores que ella adquiere.

Ejemplos:

1) Se sacan dos pelotas en sucesión, sin reemplazo, de una urna que contiene 4 pelotas rojas y 3 negras. Los resultados posibles y los valores x de la v.a X, donde X es el número de pelotas rojas son:

Espacio muestral	x
RR	2
RN	1
NR	1
NN	0

2) El encargado de un almacén le devuelve tres cascos de seguridad, seleccionados aleatoriamente, a tres obreros del taller, quienes ya se lo habían probado previamente. Suponiendo que el orden de los obreros Pérez, González y Muñoz es el correcto para recibir su casco original, señale los posibles órdenes en que los tres obreros reciben un casco y encuentre los valors m de la v.a M que representa el número de asociaciones correctas.

Espacio muestral	m
PGM	3
PMG	1
MPG	0
MGP	1
GPM	1
GMP	0

En los ejemplos anteriores, el espacio muestral tiene un número finito de elementos.

Conceptos:

1) Si en espacio muestral contiene un número finito de posibilidades o una secuencia interminable con tantos elementos como números naturales existen, entonces se llama *espacio muestral discreto*.

Los dos ejemplos anteriores corresponden a espacio muestral discreto.

2) Si en espacio muestral contiene un número infinito de posibilidades igual al número de puntos de un segmento de línea, entonces se llama *espacio muestral continuo*.

Por ejemplo: tiempo necesario para ejecutar una reacción química.

Una v.a se llama ***v.a discreta*** si se puede contar su conjunto de resultados posibles.Una v.a se llama ***v.a continua*** si se puede tomar en una escala continua.

En la mayoría de los problemas prácticos, las v.a continuas representan ***datos medidos*** , tales como alturas, pesos, temperatursa, distancias o periodos de vida; mientras que las v.a discretas representan ***datos que se cuentan*** ,tales como el número de artículos defectuosos de una muestra de k artículos o el número de accidentes por año en una vía rápida en una determinada ciudad.

Distribuciones discretas de probabilidad

Una v.a discreta asume cada uno de sus valores con una cierta probabilidad.

Con mucha frecuencia es conveniente representar con una fórmula todas las probabilidades de una v.a X. Dicha fórmula, necesariamente, debe ser función de los valores numéricos x, y que se representa por $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc.Por lo tanto, $f(x) = \mathrm{P}(X = x)$. Al conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ se le llama ***función de probabilidad o distribución de probabilidad*** de la v.a discreta X.

Concepto : El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una ***función de probabilidad, función masa de probabilidad o distribución de probabilidad*** de la v.a discreta X si satisface las siguientes condiciones :

1) $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\sum\limits_{x} f(x) = 1$

3) $\mathrm{P}(X = x) = f(x)$

Ejemplos

1) Una moneda se lanza dos veces, entonces $\Omega = \{(c, c) ; (c, s) ; (s, c) ; (s, s)\}$. Sea X la v.a que consiste en observar el número de caras.

Espacio muestral	x
$c\,c$	2
$c\,s$	1
$s\,c$	1
$s\,s$	0

$Rec\,X = \{0, 1, 2\}$

La función de probabilidad es:

$$f(0) = \mathrm{P}(x = 0) = \frac{1}{4} \qquad\qquad f(1) = \mathrm{P}(x = 1) = \frac{2}{4}$$

$$f(2) = \mathrm{P}(x = 2) = \frac{1}{4}$$

x	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2) De un lote de 25 artículos de los cuales 5 son defectuosos se eligen 4 al azar. Sea Y la v.a que representa el número de artículos defectuosos encontrados. Obtener la distribución de probabilidades de la v.a Y si los artículos se eligen sin sustitución.

$$RecY = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Sea D = artículo defectuoso, por lo tanto, D^c = aríiculo no defectuoso

$$\text{P}(D) = \frac{5}{25} \qquad \text{P}(D^c) = \frac{20}{25}$$

$$f(0) = \text{P}(y = 0) = \text{P}(D_1^c \cap D_2^c \cap D_3^c \cap D_4^c) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \cdot \frac{17}{22} = \frac{4845}{12650}$$

$$f(1) = \text{P}(y = 1) = 4\text{P}(\text{D}_1 \cap D_2^c \cap D_3^c \cap D_4^c) = 4 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{19}{23} \cdot \frac{18}{22} = \frac{5700}{12650}$$

$$f(2) = \text{P}(y = 2) = 6\text{P}(\text{D}_1 \cap D_2 \cap D_3^c \cap D_4^c) = 6 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{20}{23} \cdot \frac{19}{22} = \frac{1900}{12650}$$

$$f(3) = \text{P}(y = 3) = 4\text{P}(\text{D}_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4^c) = 4 \cdot \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} \cdot \frac{20}{22} = \frac{200}{12650}$$

$$f(4) = \text{P}(y = 4) = \text{P}(\text{D}_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4) = \frac{5}{25} \cdot \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} \cdot \frac{2}{22} = \frac{5}{12650}$$

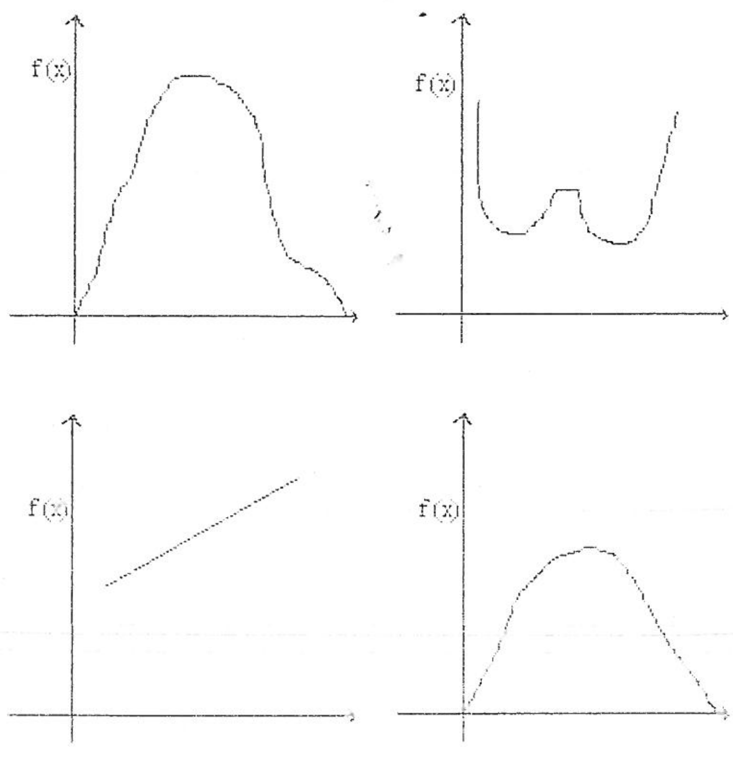
y	0	1	2	3	4
$\text{P}(Y = y)$	$\frac{4845}{12650}$	$\frac{5700}{12650}$	$\frac{1900}{12650}$	$\frac{200}{12650}$	$\frac{5}{12650}$

Distribuciones continuas de probabilidades

Una v.a continua tiene probabilidad cero de asumir cualquiera de sus valores. Luego, su distribución de probabilidad no puede darse en forma tabular.

Como una distribución de probabilidad de una v.a continua no puede presentarse en forma tabular, si puede tener una fórmula. Esta fórmula es una función, es decir, $f(x)$ y para este tipo de variables se llama ***función de densidad de probabilidad o función de densidad***.

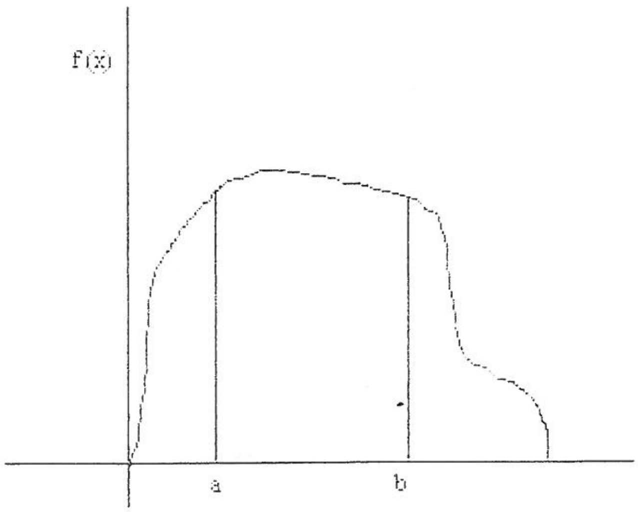
Algunas de las formas de la función de densidad son



Las áreas bajo la curva representarán las probabilidades, por lo tanto, el gráfico de la función de densidad se ubica siempre sobre el eje X

Una función de densidad se construye de tal forma que el área comprendida bajo la curva es siempre igual a uno, cuando se calcula sobre todo el recorrido de la v.a X.

Así $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$



Concepto : La función $f(x)$ es una ***función de densidad de probabilidad*** para la v.a continua X, definida en el conjunto de los números reales, si:

1) $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

3) $\displaystyle P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Ejemplos

1) Suponga que el error en la temperatura de reacción, en grados celcius, para un experimento controlado de laboratorio es una v.a continua Y, que tiene función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{3} & -1 < y < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Muestre que cumple las dos primeras condiciones de una función de densidad y además determine $P(0 < y < 1)$

$a)\ \dfrac{y^2}{3} \geq 0$

$$b) \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{-1} f(y)\,dy + \int_{-1}^{2} f(y)\,dy + \int_{2}^{+\infty} f(y)\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dy + \int_{-1}^{2} \frac{y^2}{3}\,dy + \int_{2}^{+\infty} 0\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = \left.\frac{y^3}{9}\right|_{-1}^{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy = 1$$

Por lo tanto $f(y)$ cumple con las dos primeras condiciones de una función de densidad.

$$\text{P}(0 < y < 1) = \int_{0}^{1} \frac{y^2}{3}\,dy = \left.\frac{y^3}{9}\right|_{0}^{1} = \frac{1}{9}$$

2) Para la función $f(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t < 20 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ Determine:

a) $\text{P}(t \leq 3)$ b) $\text{P}(1 < t \leq 4)$ c) $\text{P}(t = 1)$

$$
\begin{aligned}
a)\ \text{P}(t \leq 3) &= \int_{-\infty}^{3} f(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{3} e^{-t}\,dt \\
&= 0 - e^{-t}\Big|_{0}^{3} \\
&= -e^{-3} + 1 \\
&= \frac{e^3 - 1}{e^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ \text{P}(1 < t \leq 4) &= \int_{1}^{4} f(t)\,dt \\
&= \int_{1}^{4} e^{-t}\,dt \\
&= -e^{-t}\Big|_{1}^{4}
\end{aligned}
$$

$$= -e^{-4} + e^{-1}$$
$$= \frac{e^3 - 1}{e^4}$$

$$c)\ \mathrm{P}(t = 1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$$

Ejercicios

1) De una caja que contiene 4 monedas de \$ 100 y 2 de \$ 50 , se seleccionan tres de ellas al azar sin reemplazo. Determine la distribución de probabilidad para el total T de las tres monedas.

2) De una caja que contiene 4 pelotas negras y 2 verdes, se seleccionan 3 de ellas en sucesión con reemplazo. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de pelotas verdes.

3) Una v.a. X continua tiene función de densidad :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Encuentre :
a) $\mathrm{P}(2 < x < 2{,}5)$

b) $\mathrm{P}(x \leq 1{,}6)$

4) Una v.a. Y continua tiene función de densidad :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{2(1+y)}{27} & 2 < y < 5 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Encuentre :
a) $\mathrm{P}(y < 4)$

b) $\mathrm{P}(3 < y < 4)$

Esperanza o valor esperado

El valor esperado se usa como una medida de centro de una distribución de probabilidad de una v.a

Concepto

Sea X una v.a con función de probabilidad o función de densidad $f(x)$. Sea $g(X)$ una función de la v.a X. El valor esperado de X, simbolizado por $E(X)$ es:

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x h(x) \cdot f(x) & \text{si } X \text{ es una v.a discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot f(x)\, dx & \text{si } X \text{ es una v.a continua} \end{cases}$$

Observaciones

1) Si $g(X) = X$, entonces se está calculando la esperanza de la v.a X

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x \cdot f(x) & \text{si } X \text{ es una v.a discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx & \text{si } X \text{ es una v.a continua} \end{cases}$$

$E(X) = \mu$

2) Si $g(x) = (X - \mu)^2$, entonces $E[g(x)]$ se llama ***varianza*** de la v.a X y se simboliza como σ^2

$$\sigma^2 = E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x (X - \mu)^2 \cdot f(x) & \text{si } X \text{ es una v.a discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (X - \mu)^2 \cdot f(x)\, dx & \text{si } X \text{ es una v.a continua} \end{cases}$$

$\sigma = \sqrt{Var(X)}$ se conoce como desviación estándar.

σ mide la dispersión de los valores de la v.a X con respecto a su media (μ)

Propiedades de la esperanza

Sea X una v.a, entonces

1) $E(c) = c$

2) $E(cX) = c \cdot E(X)$

3) $E[h(X) \pm g(X)] = E[h(X)] \pm E[g(X)]$

Usando las propiedades de la esperanza es posible determinar una forma más simple para calcular $\sigma^2 = Var(X)$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(X-\mu)^2\\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)\\ &= E(X^2) - E(2X\mu) + E(\mu^2)\\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \qquad \text{pero } E(X)=\mu\\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2\\ &= E(X^2) - [E(X)]^2\end{aligned}$$

Luego, $Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

Así,

$$Var(X) = \begin{cases} \sum_x x^2 \cdot f(x) - \left[\sum_x x \cdot f(x)\right]^2 & \text{si } X \text{ es una v.a discreta}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\right]^2 & \text{si } X \text{ es una v.a continua}\end{cases}$$

Propiedades de varianza

Sea X una v.a, entonces

1) $Var(c) = 0$

2) $Var(cX) = c^2 \cdot Var(X)$

3) $Var(X + a) = Var(X)$

Ejemplos:

1) Se lanza una moneda tres veces, si las tres veces aparece cara o parece sello un jugador gana \$5, pero si no es así pierde \$3.¿Cuál es la esperanza de este juego?

Sea X la v.a que denota ganancia o pérdida

$\Omega = \{(c,c,c);(c,s,c);(c,c,s);(s,c,c);(s,s,c);(s,c,s);(c,s,s);(s,s,s)\}$

x	5	-3
$f(x)$	$\frac{2}{8}$	$\frac{6}{8}$

$$E(X) = 5\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(\frac{3}{4}\right) = -1$$

El jugador pierde, en promedio \$1 por lanzamiento de las tres monedas.

2) Sea Y la v.a que representa la vida en horas de un cierto dispositivo electrónico. La función de densidad es

$$f(Y) = \begin{cases} \dfrac{20000}{Y^3} & y > 100 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Encuentre la vida esperada de este dispositivo.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y \cdot f(Y)\, dY = \int_{100}^{+\infty} Y \cdot \frac{20000}{Y^3} dy$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_{100}^{b} 20000 Y^{-2} dy$$

$$= \lim_{b \to +\infty} -\frac{20000}{Y}\Big|_{100}^{b}$$

$$= \lim_{b \to +\infty} -\frac{20000}{b} + \frac{20000}{100}$$

$$= 200$$

La duración promedio de este dispositivo es de 200 horas.

3) Las ventas por hora de una máquina automática puede ser 20 , 21 o 22 cajetillas de cigarros con probabilidad 0,3 ; 0,5 y 0,2 respectivamente . ¿Cuál es la venta esperada por hora para esta máquina? ¿Cuál es la varianza de ventas por hora ?

X = ventas por hora de cigarrillos

x	20	21	22
$f(x)$	0,3	0,5	0,2

$E(X) = (20)(0,3) + (21)(0,5) + (22)(0,2)$
$E(X) = 20,9$

La venta esperada por hora es de 20,9 cajetillas.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = (400)(0,3) + (441)(0,5) + (484)(0,2)$
$E(X^2) = 437,3$

$Var(X) = 437,3 - 436,81$
$Var(X) = 0,49$

La varianza de ventas por hora es de 0,49 cajetillas^2.

4) Sea V la velocidad del viento, em Km/hr.,y suponga que V tiene función de densidad

$$f(V) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 0 < v < 10 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

La presión W en libras/pie^2, sobre la superficie del ala de un aeroplano está dada por la relación: $W = 0,003V^2$. Determine el valor esperado y la varianza de la presión.

$$\begin{aligned} E(W) &= E(0,003V^2) \\ &= 0,003E(V^2) \\ &= 0,003\int_0^{10} V^2 \cdot \frac{1}{10}\, dV \\ &= 0,003 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{V^3}{3}\Big|_0^{10} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

La presión promedio es de 0,1 libra/pie^2.

$$Var(W) = E(W^2) - [E(W)]^2$$

$$\begin{aligned} E(W^2) &= E[(0,003)^2V^4] \\ &= (0,003)^2\int_0^{10} V^4 \cdot \frac{1}{10}\, dV \\ &= (0,003) \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{V^5}{5}\Big|_0^{10} \\ &= 0,018 \end{aligned}$$

$$Var(W) = 0,018 - 0,01$$
$$Var(W) = 0,008$$

La varianza es de 0,008 (libra/pie^2)^2

5) Sea X una v.a con $\mu = 5$ y $\sigma^2 = 9$. Calcule el valor esperado de la v.a $Y = \frac{1}{3}(X - 5)$ y la varianza

$$E(X) = 5 \qquad Var(X) = 9$$

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{3}(X-5)\right] &= \frac{1}{3} \cdot E(X) - E\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 5 - \frac{5}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$Var\left[\frac{1}{3}(X-5)\right] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot Var(X)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 9$$

$$= 1$$

6) Suponga que el número de autos Z, que pasan a través de una máquina lavadora, entre las 4:00 P.M. y las 5:00 P.M. de un viernes, tiene la siguiente distribución de probabilidades

z	4	5	6	7	8	9
$f(z)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sea $g(Z) = 2Z - 1$ que representa la cantidad de dinero, en dólares, que el gerente del negocio le paga al encargado. Encuentre las ganancias esperadas del encargado en este período en particular.

$$E(Z) = (4)\left(\frac{1}{12}\right) + (5)\left(\frac{1}{12}\right) + (6)\left(\frac{1}{4}\right) + (7)\left(\frac{1}{4}\right) + (8)\left(\frac{1}{6}\right) + (9)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$E(Z) = \frac{41}{6}$$

$$E(2Z-1) = 2E(Z) - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{41}{6} - 1$$

$$= \frac{38}{3}$$

La ganancia esperada del encargado es 12,67 dólares estre las 4:00 P.M. y las 5:00 P.M.

7) Sea X una v.a con función de densidad

$$f(X) = \begin{cases} \frac{X^2}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado de g$(X) = 4X + 3$

$$E(X) = \int_{-1}^{2} X \cdot \frac{X^2}{3} dX$$

$$E(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} X^4 \Big|_{-1}^{2}$$

$$E(X) = \frac{15}{12}$$

Distribuciones discretas de probabilidad

El comportamiento de una v.a queda descrito por su distribución de probabilidad.

1) Distribución Bernoulli

El experimento más sencillo es aquel que puede resultar en uno de dos resultados posibles.

Ejemplo

a) aprobar o reprobar una asignatura
b) obtener cara o sello al lanzar una moneda
c) sexo de un niño al nacer

El experimento con dos resultados posibles se denomina ensayo Bernoulli

Cualquier experimento puede usarse para definir un ensayo Bernoulli, simplemente denotando algún evento A como éxito y su complemento A^c como fracaso.

La distribución de probabilidad para un ensayo Bernoulli depende sólo de un parámetro p, probabilidad de éxito, y entonces $1-p$ es la probabilidad de fracaso $(1-p=q)$, donde $0<p<1$

Concepto: Sea Ω el espacio muestral de un experimento, sea $A \subseteq \Omega$ cualquier evento con $P(A)=p$, $0<p<1$ y sea X la v.a definida por

$$X(x)=\begin{cases}1 & x \in A\\ 0 & x \in A^c\end{cases}$$

Entonces X se llama v.a Bernoulli con parámetro p.

La distribución de probabilidad de una v.a Bernoulli es de la siguiente forma

$P(x=1)=P(A)=p$
$P(x=0)=P(A^c)=1-p=q$

x	1	0
$f(x)$	p	q

la cual se puede resumir de la siguiente forma

$\boxed{f(x)=p^x \cdot q^{1-x} \quad x=0,1}$ y se denota $X \sim$ Bernoulli (p)

El símbolo $\sim$ denota distribución

El proceso Bernoulli debe tener las siguientes propiedades:

a) El experimento consiste en n intentos repetidos.

b) Los resultados de cada uno de los intentos pueden clasificarse como un éxito o un fracaso.

c) La probabilidad de éxito, p, permanece constante para todos los intentos.

d) Los intentos repetidos son independientes .

e) $E(X) = p$, $Var(X) = p \cdot q$

2) Distribución Binomial

Concepto: un experimento que consiste de n ensayos Bernoulli independientes, cada uno con probabilidad de éxito p , se llama experimento binomial con n ensayos y parámetro p .

Ensayos independientes indica que los ensayos son eventos independientes, esto es, lo que ocurre en un ensayo no influye en el resultado de cualquier otro ensayo.

El espacio muestral para un experimento binomial es el producto cartesiano de los espacios muestrales de los ensayos Bernoulli consigo mismo n veces

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times ... \times \Omega_n \text{ donde } \Omega_i = \{\text{éxito}(E), \text{fracaso(F)}\} \forall\, i = 1, 2, ..., n$$

Cada elemento de Ω es una $n-$ upla, $w = (w_1, w_2, w_3, ..., w_n)$ donde $w_i =$ E o F
Luego $P_i(E) = p$; $P_i(F) = 1 - p = q$, $\forall i = 1, 2, ..., n$

Concepto: Sea X el número total de éxitos en un experimento binomial con n ensayos y parámetro p .Entonces X se llama v.a binomial con parámetro n y p .Luego $X \sim b(n, p)$ y su distribución de probabilidades es:

$$\boxed{f(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \qquad x = 0, 1, ..., n}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \qquad x = 0, 1, ..., n}$$

$E(X) = n \cdot p$, $Var(X) = n \cdot p \cdot q$

Ejemplos

1) Cinco dados son lanzados una vez
a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un tres?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos tres?

$n = 5$
X es la v.a que denota el número de tres al lanzar cinco dados
$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$P(E) = P(\text{obtener un número tres}) = \frac{1}{6}$
$P(F) = P(\text{no obtener un número tres}) = \frac{5}{6}$

$$X \sim b\left(5, \frac{1}{6}\right)$$

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{5-x} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$a)\ \mathrm{P}(x \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(x = 0)$

$$\mathrm{P}(x = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-0} = \left(\frac{5}{6}\right)^{5}$$

$$\mathrm{P}(x \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{5} = 0,5981$$

La probabilidad de obtener al menos un tres es de 0,5981 .

$b)\ \mathrm{P}(x \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(x < 2) = 1 - \mathrm{P}(x = 0) - \mathrm{P}(x = 1)$

$$\mathrm{P}(x = 1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} = 0,4018$$

$$\mathrm{P}(x \geq 2) = 0,5981 - 0,4018 = 0,19$$

La probabilidad de obtener al menos dos tres es de 0,19 .

2) La probabilidad de que una cierta clase de componente pase con éxito una determinada prueba de impacto es $3/4$. Encuentre la probabilidad de que exactamente dos de los siguientes cuatro componentes que se prueben pasen la prueba.

$n = 4$
X = pasar con éxito la prueba de impacto
$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$p = \frac{3}{4} \qquad q = \frac{1}{4}$$

$$X \sim b\left(4, \frac{3}{4}\right)$$

$$f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\mathrm{P}(x = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2} = \frac{27}{128} = 0,2109$$

La probabilidad de que exactamente dos de las siguientes piezas cuatro componentes que se prueben pasen la prueba es de 0,2109 .

Solución

1)

$a)$ $\mathrm{P}(3 \leq x \leq 6) = 0,166$

$b)$ $\mathrm{P}(x < 2) = 0,54$

$c)$ $\mathrm{P}(x > 5) = 0,002$

2) $\mathrm{P}(x = 5) = 0,12$

3) $\mathrm{P}(x > 4) = 0,063$

4) $\mathrm{P}(x \geq 4) = 0,06$

5)

$a)$ $\mathrm{P}(x = 0) = 0,08$

$b)$ $\mathrm{P}(x < 2) = 0,34$

$c)$ $\mathrm{P}(x > 3) = 0,09$

3) Distribución Hipergeométrica

Tanto la distribución binomial como la distribución hipergeométrica persiguen un mismo objetivo: el número de éxitos en una muestra que contiene n observaciones. Lo que establece una diferencia entre estas dos distribuciones de probabilidad discreta es la forma en que se obtiene la información. Para el caso de la distribución binomial la información de la muestra se toma con reposición de una muestra finita, o sin reposición de una población infinita. Para el modelo hipergeométrico la información de la muestra se toma sin reposición de una población finita. Por lo tanto, la probabilidad de éxito, p ,es constante a lo largo de todas las observaciones de un experimento binomial, en cambio, en una distribución hipergeométrica el resultado de una observación afecta el resultado de las oberavciones previas.

En general, el interés que se tiene es en la probabilidad de seleccionar x éxitos de los k posibles resultados o artículos también considerados éxitos y $n-x$ fracasos de los $N-k$ posibles resultados o artículos también considerados fracasos, cuando una muestra aleatoria de tamaño n se selecciona de N resultados o artículos totales. Esto se conoce como un experimento hipergeométrico.

La función de probabilidad de una v.a X con distribución hipergeométrica es

$$\boxed{f(x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x=0,1,2,\ldots,n}$$

$X \sim H(N,n,k)$

$$E(X)=n\cdot\frac{k}{N} \qquad Var(X)=n\cdot\frac{k}{N}\left(\frac{N-k}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Ejemplos

1) Un comité compuesto por cinco personas se selecciona aleatoriamente de un grupo formado por tres químicos y cinco físicos. Encuentre la distribución de probabilidad para el número de químicos en el comité.

$X=$ v.a que indica el número de químicos
$X=\{0,1,2,3\}$
$N=8 \qquad n=5 \qquad k=3 \qquad N-k=5$

$X\sim H(8,5,3)$

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{5}{5-x}}{\binom{8}{5}} \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

$$P(x=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56} \qquad P(x=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{4}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{56}$$

$$P(x=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56} \qquad P(x=3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{2}}{\binom{8}{5}} = \frac{10}{56}$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

2) Entre 16 postulantes para un trabajo, 10 tenían un grado universitario. Si tres de los postulantes son elegidos al azar para una entrevista. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) ninguno tenga grado universitario?.
b) exactamente uno tenga grado universitario?.
c) dos tengan grado universitario?.
d) los tres tengan grado universitario?.

$X =$ v.a que indica postulante con grado universiatrio
$X = \{0, 1, 2, 3\}$
$N = 16 \qquad n = 3 \qquad k = 10 \qquad N - k = 6$

$X \sim H(8, 3, 10)$

$$f(x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{16}{3}} \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

$$P(x=0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{6}{3}}{\binom{16}{3}} = \frac{1}{28}$$

La probabilidad de que ninguno tenga grado universitario es de 0,0357 .

4) Distribución Poisson

Los experimentos que resultan en valores numéricos de una v.a X y que representan el número de resultados durante un intervalo de tiempo dado o en una región específica frecuentemente se llaman ***experimentos Poisson***. El intervalo de tiempo dado puede ser de cualquier duración, por ejemplo, un minuto, un día, una semana, un mes o inclusive un año. Por tal motivo un experimento Poisson puede generar observaciones para una cierta v.a X que representen el número de llamadas telefónicas por hora que se recibe en una oficina, el número de días en que una determinada escuela se cierra en invierno debido a la nieve, o al número de juegos pospuestos debido a la lluvia durante una temporada de fútbol.

El número x de resultados que ocurren en un experimento Poisson se llama ***v.a. de Poisson***. El número promedio de resultados se calcula de la forma $\mu = E(X) = \lambda t$, donde t es el tiempo o región específicos de interés.

La función de distribución es de la forma:

$$f(X) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, ...$$

$$f(X) = \frac{e^{-\mu}(\mu)^x}{x!}$$

$$X \sim P(\mu)$$

Ejemplos

1) El número promedio de partículas radioactivas que pasan a través de un contador durante un milisegundo en un experimento de laboratorio es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo determinado?.

$\mu = 4$ $\qquad$ X = N° de partículas que entran en el contador.

$$X \sim P(4)$$

$$f(X) = \frac{e^{-4}(4)^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, ...$$

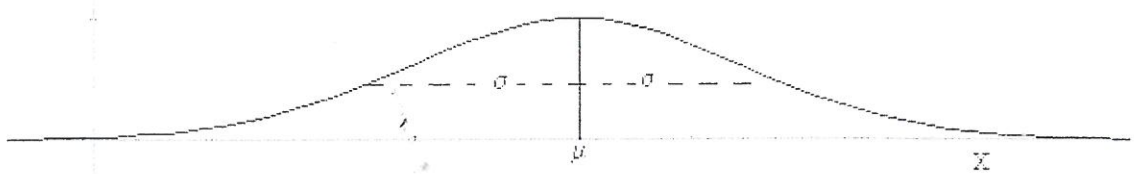
$$\text{P}(x = 6) = \frac{e^{-4}(4)^6}{6!} = 0,1042$$

La probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo determinado es de 0,1042.

Distribuciones continuas de probabilidad

1) Distribución Normal

Es la distribución continua de probabilidad más importante en el campo de la estadística. Su gráfica recibe el nombre de curva normal, su forma es la de una campana



Esta curva permite describir muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza, la industria y la investigación.

Una v.a continua X que tiene distribución en forma de campana se llama v.a. normal.

Concepto: la función de densidad de la v.a normal X, con media μ y varianza σ^2, es:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Propiedades de la curva normal

1) El máximo valor de la curva es en $x = \mu$

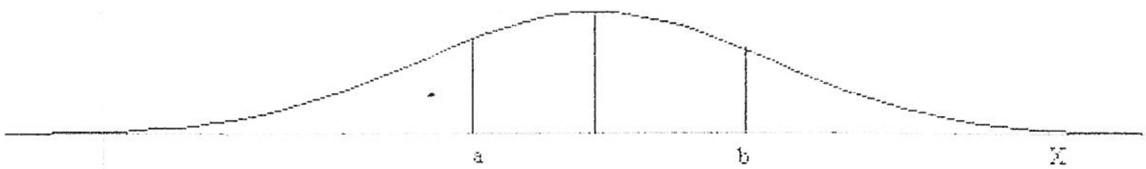
2) La curva es simétrica respecto a la recta $x = \mu$

3) La curva es cóncava hacia arriba en $]-\infty, \mu - \sigma [\cup] \mu + \sigma, +\infty[$ y es cóncava hacia abajo en $]\mu - \sigma, \mu + \sigma[$.

4) La curva es asintótica al eje X.

5) El área bajo la curva y sobre el eje X es uno.

Areas bajo la curva normal



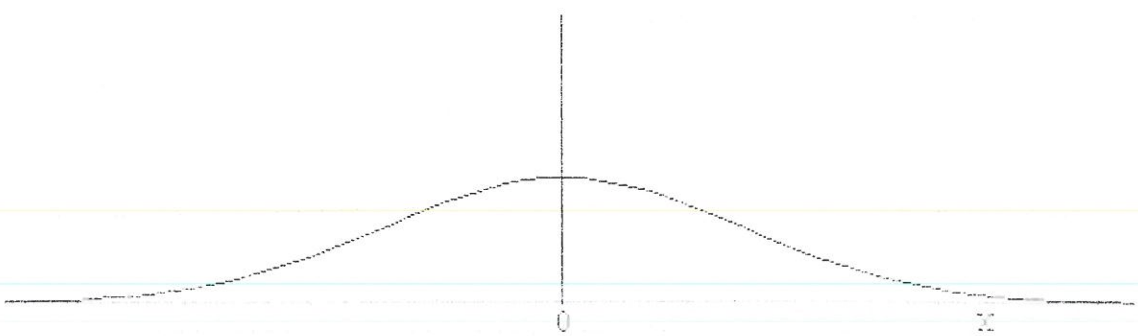
$$P(a < X < b) = \int_a^b f(X)\,dX$$

Sin embargo, resolver esta integral con la función de densidad de la v.a normal no es tan simple. Por tal motivo, se recurre a un proceso denominado ***estandarización*** basándose en una v.a normal z que tiene $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ y que se denomina ***distribución normal estándar***

Concepto: Si z es una v.a normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, tiene función de densidad:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}Z^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$Z \sim N(0,1)$



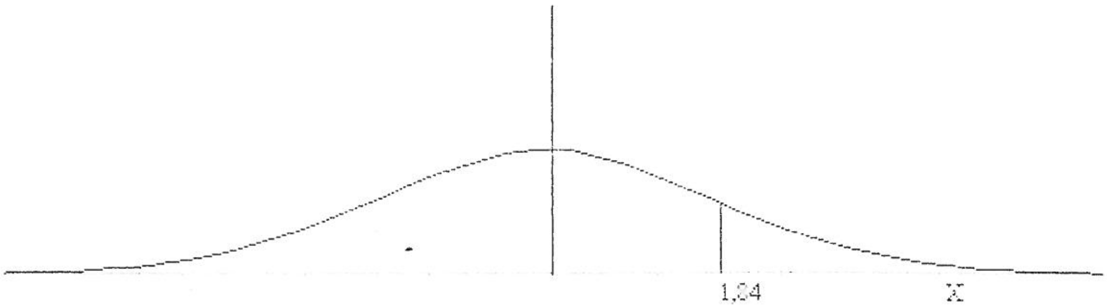
El proceso de estandarización se realiza de la siguiente forma:

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

Los valores de la v.a normal z se encuentran tabulados

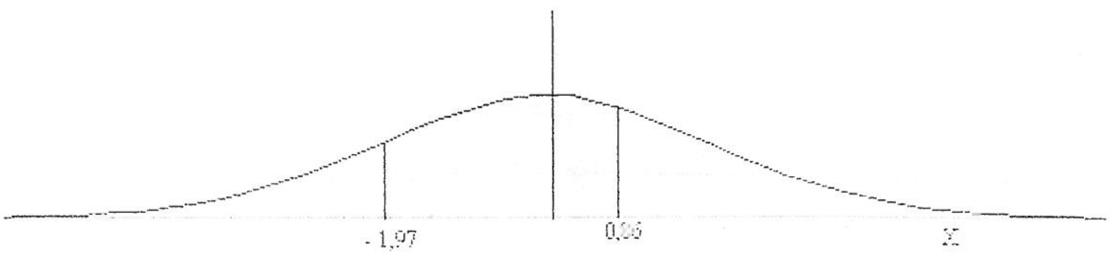
Ejemplos:

1) $P(z > 1,84)$



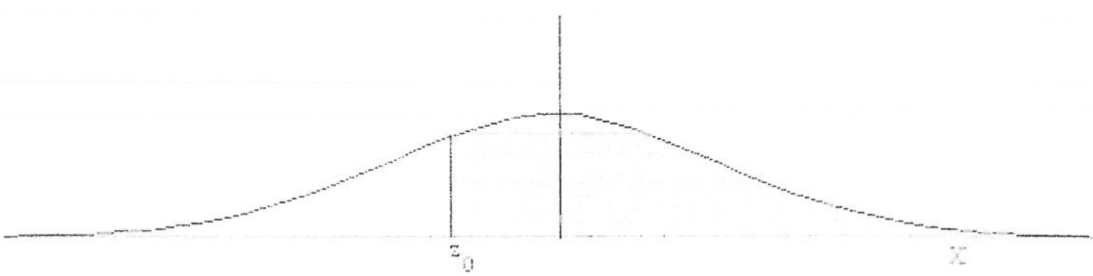
$$\begin{aligned} P(z > 1,84) &= 1 - P(z \leq 1,84) \\ &= 1 - 0,9671 \\ &= 0,0329 \end{aligned}$$

2) $P(-1,97 < z < 0,86)$



$$\begin{aligned} P(-1,97 < z < 0,86) &= P(z < 0,86) - P(z < -1,97) \\ &= 0,8051 - 0,0244 \\ &= 0,7807 \end{aligned}$$

3) $P(z > z_0) = 0,7486$



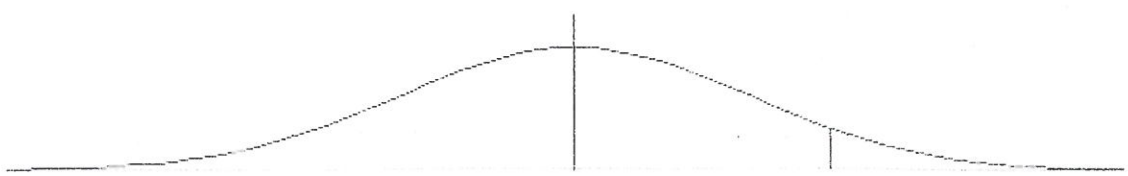
$P(z > z_0) = 0,7486$
$1 - P(z \leq z_0) = 0,7486$
$1 - 0,7486 = P(z \leq z_0)$
$0,2514 = P(z \leq z_0) \Rightarrow z_0 = -0,67$

4) Sea X una v.a normal con $\mu = 40$ y $\sigma = 6$, determine
a) $P(X \leq x) = 0,45$

$$P\left(z \leq \frac{x - 40}{6} \right) = 0,45$$

$$\frac{x - 40}{6} = -0,13 \Rightarrow x = 39,22$$

b) $P(X > x) = 0,14$



$$1 - P\left(z \leq \frac{x - 40}{6} \right) = 0,14$$

$$P\left(z \leq \frac{x - 40}{6} \right) = 0,86$$

$$\frac{x - 40}{6} = 1,08 \Rightarrow x = 46,48$$

61